MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:

WARSZAWA
TOM I

THEORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES

PAR

STEFAN BANACH
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

HAFNER PUBLISHING COMPANY
NEW YORK

A MADAME LUCIE BANACH.

PRÉFACE.

La théorie des opérations, créée par V. Volterra, a pour objet l'étude des fonctions définies dans les espaces à une infinité de dimensions. Dans plusieurs domaines très importants des mathématiques cette théorie a pénétré d'une façon essentielle: il suffit de rappeler que la théorie des équations intégrales et le calcul des variations se sont trouvés contenus comme des cas particuliers dans les principales sections de la théorie générale des opérations. On voit dans cette théorie les méthodes de mathématique classique s'unir aux méthodes modernes d'une manière parfaitement harmonieuse et remarquablement efficace. Elle permet souvent d'interpréter les théorèmes de la théorie des ensembles ou de la topologie d'une façon tout à fait imprévue. Ainsi p. ex. le théorème topologique sur le point invariant se laisse traduire moyennant la théorie des opérations (comme l'ont montré M. M. Birkhoff et Kellogg) dans le théorème classique sur l'existence des solutions des équations différentielles. Il y a des parties importantes des mathématiques dont la connaissance vraiment approfondie n'est possible qu' à l'aide de la théorie des opérations. Telles sont aujourd'hui: la théorie des fonctions de variable réelle, équations intégrales, calcul des variations, etc.

Cette théorie mérite donc avec raison, aussi bien par sa valeur esthétique que par la portée de ses raisonnements (même abstraction faite de ses nombreuses applications) l'intérêt de plus en plus croissant que lui prètent les mathématiciens. Aussi on ne s'étonnera pas à l'opinion de M. J. Hadamard, qui considère la théorie des opérations comme une des plus puissantes méthodes de recherche de la mathématique contemporaine.

Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites *linéaires*, qui correspond à celle des formes linéaires $a_1 x_1 + a_2 x_2 + + \ldots + a_n x_n$ de l'algèbre.

La notion d'opération linéaire peut être définie comme suit. Soient E et E_1 deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément-zéro sont supposés définis. Soit $y = U(x)$ une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément x de E un élément y de E_1 (dans le cas où E_1 est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte aussi le nom de *fonctionnelle*). Si, quels que soient x_1 et x_2 de E, on a $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$, l'opération $U(x)$ s'appelle *additive*. Si, en outre, E et E_1 sont des espaces *métriques*, c. à d. que dans chacun d'eux la *distance* des éléments est définie, on peut considérer des opérations $U(x)$ *continues*. Or, les opérations à la fois additives et continues s'appellent *linéaires*.

Dans ce livre, je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux, notamment dans les ainsi dits *espaces du type* (B), dont des cas particuliers sont: l'espace des fonctions continues, celui des fonctions à p-ième puissance sommable, l'espace de Hilbert, etc.

Je donne aussi l'interprétation des théorèmes généraux dans diverses disciplines mathématiques, à savoir dans la théorie des groupes, des équations différentielles, des équations intégrales, des équations à une infinité d'inconnues, des fonctions de variable réelle, des méthodes de sommations, des séries orthogonales, etc. Il est intéressant de voir certains théorèmes donner des résultats même dans des disciplines assez éloignées les unes des autres. Ainsi p. ex. le théorème sur l'extension (prolongement) d'une fonctionnelle additive résout simultanément le problème général de la mesure, le problème des moments et celui de l'existence des solutions d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

A coté des méthodes algébriques, ce sont surtout celles de la théorie générale des ensembles qui passent dans ce livre au premier plan, en gagnant à cette théorie plusieurs applications nouvelles. On trouvera aussi dans divers chapitres de ce livre de nouveaux théorèmes généraux. Tels sont, en particulier, les deux derniers chapitres et l'annexe: les résultats qu'ils renferment n'ont été nulle part publiés. Ils constituent une ébauche de l'étude des invariants relatifs aux transformations linéaires (des espaces du type (B)). En particulier, le Chapitre XII contient la définition et l'analyse des propriétés de la *dimension linéaire*, qui joue dans ces espaces un rôle analogue à celui de la dimension au sens ordinaire dans les espaces euclidiens.

Les résultats et les problèmes qui, faute de place, n'ont pas été envisagés, sont discutés brièvement dans les Remarques à la fin du livre. On y trouvera aussi quelques indications bibliographiques supplémentaires. D'une façon générale (excepté l'Introduction) je n'indique pas l'origine des théorèmes que je crois trop simples ou bien démontrés ici pour la première fois.

Un certain nombre d'ouvrages plus récents a paru et continue à paraître dans le périodique *Studia Mathematica*, qui poursuit le but de grouper avant tout les recherches concernant l'analyse fonctionnelle et ses applications.

Je me propose de consacrer un second livre (qui constituera la suite de l'ouvrage présent) à la théorie des autres opérations fonctionnelles avec un large emploi des méthodes topologiques.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail, en se chargeant de la traduction de mon manuscrit polonais, ou concourir à ma tâche par leurs précieux conseils. Je remercie tout particulièrement M. H. Auerbach pour sa collaboration à la rédaction de l'Introduction et M. S. Mazur pour le concours général qu'il m'a prêté et pour sa part à la rédaction des Remarques finales.

Stefan Banach.

Lwów, Juillet 1932.

ERREURS.

Page 130 en haut lire:

$$\text{(45)} \quad \textit{la suite} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}| + |A_n| \right\} \textit{bornée},$$

$$\text{(46)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(A_n + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in}\right) = A + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2$$

A. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

Nous admettons que le lecteur connait la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue[1]).

§ 1. *Quelques théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue*[2]).

Si les fonctions mesurables $x_n(t)$ sont bornées dans leur ensemble et la suite $\{x_n(t)\}$ converge presque partout dans un intervalle fermé $[a, b]$ vers la fonction $x(t)$, on a

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty}\int^b x_n(t)\,dt = \int^b x(t)\,dt\,.$$

Plus généralement, s'il existe une fonction sommable $\varphi(t) \geqslant 0$ telle que $|x_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ pour $n = 1, 2, \ldots,$ la fonction limite est également sommable et satisfait à l'égalité (1).

Si les fonctions $x_n(t)$ sont sommables dans $[a, b]$ et forment une suite non décroissante, convergente vers la fonction $x(t)$, on a l'égalité (1), lorsque la fonction $x(t)$ est sommable, et

$$\lim_{n\to\infty}\int^b x_n(t)\,dt = +\infty$$

dans le cas contraire.

[1]) Cf. p. ex. C. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire,* Paris, Gauthier-Villars (1916), ou H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2-me édition, Paris, Gauthier-Villars (1928).

[2]) Cf. p. ex. C. de la Vallée Poussin, l. cit., p. 49.

Si la suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions à p-ième puissance sommable $(p > 1)$ converge presque partout vers la fonction $x(t)$ et si

$$\int_a^b |x_n(t)|^p\, dt < K \qquad \text{pour tout } n = 1, 2, \dots,$$

la fonction $x(t)$ est également à p-ième puissance sommable [1].

§ 2. *Quelques inégalités pour les fonctions à p-ième puissance sommable* [2].

La classe des fonctions à p-ième $(p > 1)$ puissance sommable dans $[a, b]$ sera désignée par $(L^{(p)})$. Au nombre p on fait correspondre le nombre q lié avec p par l'équation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et portant le nom *d'exposant conjugué avec p*. Pour $p = 2$ on a donc également $q = 2$.

Si $x(t) \subset (L^{(p)})$ et $y(t) \subset (L^{(q)})$, la fonction $x(t) \cdot y(t)$ est sommable et son intégrale remplit l'inégalité

$$\left|\int_a^b x\, y\, dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

En particulier, on a donc pour $p = 2$:

$$\left|\int_a^b x\, y\, dt\right| \leqslant \left(\int_a^b x^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b y^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ appartiennent à $(L^{(p)})$, il en est de-même de la fonction $x(t) + y(t)$ et on a:

$$\left(\int_a^b |x + y|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

[1] Cf. E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a real variable...*, 2-nd Edition, Cambridge (1921/26), vol. I, p. 300.

[2] Cf. E. W. Hobson, l. c., vol. I, p. 588.

A ces inégalités correspondent les inégalités arythmétiques suivantes:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

dont la première donne pour $p = 2$ l'inégalité connue de Schwarz:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Big| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour toute fonction $x(t)$ à p-ième ($p \geqslant 1$) puissance sommable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $\varphi(t)$ telle que

$$\int_a^b |x - \varphi|^p < \varepsilon$$ [1].

§ 3. *La convergence asymptotique.*

La suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions mesurables dans un certain ensemble est dite *asymptotiquement convergente (*ou *convergente en mesure)* vers la fonction $x(t)$ définie dans cet ensemble, lorsqu'on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} m \underset{t}{E}\left(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon\right) = 0$$ [2].

Une suite $\{x_n(t)\}$ asymptotiquement convergente vers la fonction $x(t)$ contient toujours une suite partielle convergente (dans le sens ordinaire) presque partout vers cette fonction.

[1]) Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 250.

[2]) mE désigne la mesure de l'ensemble E; le symbole $\underset{t}{E}()$ désigne d'une façon générale l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles se présente la propriété mise en ().

Pour qu'une suite $\{x_n(t)\}$ soit asymptotiquement convergente, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{i,\, k \to \infty} m \, \underset{t}{E} \left(| x_i(t) - x_k(t) | > \varepsilon \right) = 0 \; [1].$$

4. *La convergence en moyenne.*

Etant donnée une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions à p-ième puissance sommable ($p \geqslant 1$) dans $[a, b]$, on dit que cette suite y est à p-ième puissance *convergente en moyenne* vers la fonction $x(t)$ à p-ième puissance sommable, lorsque

$$\lim_{n \to \infty} \int^{b} | x_n(t) - x(t) |^p \, dt = 0 .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction $x(t)$ existe, est que l'on ait

$$\lim_{i,\, k \to \infty} \int^{b} | x_i(t) - x_k(t) |^p \, dt = 0 .$$

La fonction $x(t)$ est alors définie dans $[a, b]$ d'une façon univoque, sauf dans un ensemble de mesure nulle.

Une suite de fonctions qui converge en moyenne vers une fonction $x(t)$ est aussi asymptotiquement convergente vers cette fonction [2]) et contient par conséquent (§ 3) une suite partielle qui converge (dans le sens ordinaire) presque partout vers la même fonction.

§ 5. *L'intégrale de Stieltjes* [3]).

Soient $x(t)$ une fonction continue et $\alpha(t)$ une fonction à variation bornée dans $[a, b]$. En subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels à l'aide des nombres

[1]) Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 242—244.
[2]) Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 245.
[3]) Cf. p. ex. H. Lebesgue, l. c., Chapitre XI.

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

et choisissant dans chacun de ces intervalles partiels un nombre arbitraire ϑ_i, nous pouvons, par analogie avec la définition de l'intégrale de Riemann, former la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i)\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \quad où \quad t_i \geqslant \vartheta_i \geqslant t_{i-1}.$$

On démontre que pour toute suite de subdivisions, pourvu que leur intervalle partiel le plus grand tende vers 0, les sommes S ont une limite commune à toutes suites pareilles; cette limite est désignée par

$$\int^{b} x(t)\,d\alpha(t)$$

et dite *intégrale de Stieltjes.*

Cette intégrale a les propriétés suivantes:

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) = -\int_b^a x(t)\,d\alpha(t),$$

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) + \int_b^c x(t)\,d\alpha(t) = \int_a^c x(t)\,d\alpha(t),$$

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\,d\alpha(t) = \int_a^b x_1(t)\,d\alpha(t) + \int_a^b x_2(t)\,d\alpha(t).$$

Le premier théorème sur la valeur moyenne s'exprime ici par l'inégalité

$$\left|\int^{b} x(t)\,d\alpha(t)\right| \leqslant MV,$$

où M désigne la borne supérieure de la valeur absolue $|x(t)|$ et V la variation totale de la fonction $\alpha(t)$ dans $[a, b]$.

Si la fonction $\alpha(t)$ est absolument continue, on peut exprimer l'intégrale de Stieltjes par celle de Lebesgue comme il suit:

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\,\alpha'(t)\,dt\,.$$

Si $\alpha(t)$ est une fonction croissante (c. à. d. que l'on a toujours $\alpha(t') < \alpha(t'')$ pour $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$) et si l'on pose pour tout nombre s de l'intervalle $[\alpha(a), \alpha(b)]$

$$\beta(s) = a + \text{borne sup } \underset{t}{E}(s \geqslant \alpha(t))\,,$$

on obtient:

$$\int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds\ ^{1)}. \tag{2}$$

Démonstration. Nous avons par définition de $\beta(s)$:

$$\beta[\alpha(t)] = t \qquad \textit{pour} \qquad a \leqslant t \leqslant b\,. \tag{3}$$

La fonction $\beta(s)$ étant par hypothèse croissante et admettant comme valeurs tous les nombres de l'intervalle $[a, b]$ où, d'après (3), $a = \beta[\alpha(a)]$ et $b = \beta[\alpha(b)]$, elle est une fonction continue. Il en résulte que la fonction $x[\beta(s)]$ est également continue.

Considérons une subdivision (δ) de $[a, b]$ donnée par les nombres $a = t_0 < < t_1 < \ldots < t_n = b$ et posons $\alpha(t_i) = \vartheta_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous avons

$$I_i = \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} x[\beta(s)]\;ds = (\vartheta_i - \vartheta_{i-1})\,x(\vartheta_i')\,,$$

où $\vartheta_i' = \beta(s_i')$ et $\vartheta_{i-1} \leqslant \vartheta_i' \leqslant \vartheta_i$. Evidemment $\beta(\vartheta_{i-1}) \leqslant \beta(s_i') = \vartheta_i' \leqslant \beta(\vartheta_i)$. En vertu de (3) on a $\beta(\vartheta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$ et d'une façon analogue $\beta(\vartheta_i) = t_i$. Par conséquent

$$t_{i-1} \leqslant \vartheta_i' \leqslant t_i\,,$$

donc

$$I_i = x(\vartheta_i')\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\,,$$

[1] Cf. H. Lebesgue, l. c., p. 258 — 260.

d'où

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x\,[\beta\,(s)]\,ds = \sum_{i=1} I_i = \sum_{i=1} x\,(\vartheta_i')\,[\alpha\,(t_i) - \alpha\,(t_{i-1} \tag{4}$$

Or, cette dernière somme tendant vers $\int_a^{} x\,(t)\,d\alpha\,(t)$, lorsque la longueur maximum des intervalles de la subdivision (δ) tend vers 0, l'égalité (4) donne l'égalité (3), q. f. d.

Ceci établi, si l'on admet que $\alpha\,(t)$ est une fonction quelconque à variation bornée, on peut la représenter toujours comme une différence $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ où les fonctions $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ sont croissantes; en désignant comme auparavant par $\beta_1(s)$ et $\beta_2(s)$ les fonctions correspondantes, nous obtenons

$$\int_a^b x\,(t)\,d\alpha\,(t) = \int_a^b x\,(t)\,d\alpha_1(t) - \int_a^b x\,(t)\,d\alpha_2(t) =$$

$$= \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x\,[\alpha_1(s)]\,ds - \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x\,[\alpha_2\,(s)]\,ds\,.$$

Si les fonctions $x_n(t)$ sont continues et bornées dans leur ensemble et la suite $\{x_n(t)\}$ converge partout vers une fonction continue $x\,(t)$, on a pour toute fonction $\alpha\,(t)$ à variation bornée

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,d\alpha\,(t) = \int_a^b x\,(t)\,d\alpha\,(t)\,,$$

car

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]\,ds = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x\,[\beta_1(s)]\,ds \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x\,[\beta_2(s)]\,ds = \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]\,ds\,.$$

§ 6. *Le théorème de Lebesgue.*

Notons encore le théorème suivant.

Pour qu'une suite de fonctions sommables $\{x_n(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ remplisse l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \alpha(t)\, x_n(t)\, dt = 0$$

pour toute fonction $\alpha(t)$ mesurable et bornée dans $[0, 1]$, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes se trouvent simultanément satisfaites:

1° la suite $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\, dt\right\}$ est bornée,

2° pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que tout sous-ensemble H de $[0,1]$ de mesure $< \eta$ donne lieu à l'inégalité $\left|\int_H x_n(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon$, quel que soit $n = 1, 2, \dots$,

3° $\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\, dt = 0$ pour tout $0 \leqslant u \leqslant 1$ [1]).

Nous connaîtrons dans la suite d'autres théorèmes de ce genre.

B. Ensembles et opérations mesurables (B) dans les espaces métriques.

§ 7. *Espaces métriques.*

Etant donné un ensemble non vide E, on dit qu'il constitue un *espace métrique* ou *espace* (D), lorsqu'à tout couple ordonné x, y de ses éléments correspond un nombre (x, y) satisfaisant aux conditions [1]):

1) $(x, x) = 0, \quad (x, y) > 0$ *lorsque* $x \neq y$,

2) $(x, y) = (y, x)$,

3) $(x, z) \leqslant (x, y) + (y, z)$.

[1]) H. Lebesgue, Annales de Toulouse 1909.

[1]) Les trois conditions 1) — 3) peuvent être remplacées par les deux suivantes: 1*) $(x,y) = 0$ *équivaut à* $x = y$, 2*) $(x, z) \leqslant (x, y) + (z, y)$. Cf. A. Lindenbaum, *Sur les espaces métriques*, Fundamenta Mathematicae VIII (1926), p. 211.

Le nombre (x, y) s'appelle *distance* des points (des éléments) x, y. Une suite de points $\{x_n\}$ est dite *convergente*[1]), lorsque

$$\lim_{p, q \to \infty} (x_p, x_q) = 0; \tag{5}$$

on l'appelle *convergente vers le point* x_0 (ce qu'on écrit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$), lorsque

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0) = 0. \tag{6}$$

Le point x_0 porte alors le nom de *limite* (ou de *point-limite*) de la suite $\{x_n\}$.

Il est facile de voir que la relation (6) entraîne (5), car on a toujours

$$(x_p, x_q) \leqslant (x_p, x_0) + (x_q, x_0).$$

Par conséquent, une suite convergente vers un point est par cela-même une suite convergente; bien entendu, la réciproque n'est pas toujours vraie.

L'espace (D) à propriété que toute suite convergente y converge vers un certain point est dit *complet.*

L'espace (D) tel que toute suite infinie de ses points contient une suite convergente vers un point s'appelle *compact.*

Les espaces euclidiens constituent autant d'exemples des espaces (D) complets. Nous en allons énumérer ici une série d'autres exemples importants.

1. *Soit* (S) *l'ensemble des fonctions mesurables* dans l'intervalle $[0,1]$. Faisons correspondre à tout couple ordonné x, y d'éléments de cet ensemble[2]) le nombre

$$(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, dt.$$

[1]) Les suites convergentes dans notre sens sont appelées d'habitude „suites satisfaisant à la *condition de Cauchy*", c. à. d. précisément à la condition (5).

[2]) Nous posons: $x = x(t)$ et $y = y(t)$, resp. $x_n = x_n(t)$ et $x_0 = x_0(t)$, dans tous les exemples où x et y, resp. x_n et x_0, sont des éléments d'un ensemble de fonctions.

On vérifie facilement que les conditions 1) — 3), énoncées plus haut pour la distance, se trouvent remplies. En effet, quant aux conditions 1) et 2), c'est évident (nous ne distinguons pas entre les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle) et pour se convaincre que la condition 3) est également réalisée, il suffit de remarquer que l'on a pour tout couple de nombres arbitraires a, b:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Ainsi „métrisé", l'ensemble (S) forme donc un espace (D); cet espace est complet, car la convergence d'une suite $\{x_n\}$ de ses points (vers un point x_0) s'y ramène à la convergence en mesure de la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ (vers la fonction $x_0(t)$ dans $[0, 1]$.

2. *Soit* (s) *l'ensemble de toutes les suites de nombres.* Posons pour tout couple ordonné x, y de ses éléments [1]):

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

L'ensemble (s) forme alors un espace (D) complet. En effet, la convergence d'une suite de points $\{x_m\}$, resp. sa convergence vers un point x_0, y signifie (en posant $x_m = \{\xi_n^{(m)}\}$ et $x_0 = \{\xi_n\}$) que pour tout n naturel chacune des suites $\{\xi_n^{(m)}\}$ est convergente, resp. converge vers ξ_n, à mesure que m tend vers l'infini.

3. *Soit* (M) *l'ensemble des fonctions mesurables et bornées* dans $[0, 1]$. Si l'on pose pour tout couple x, y de ses éléments

$$(x, y) = \text{vrai } \underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{maximum}} |x(t) - y(t)|,$$

[1]) Nous posons $x = \{\xi_n\}$ et $y = \{\eta_n\}$ dans tous les exemples des espaces de suites.

on en obtient un espace (D) complet. La convergence d'une suite de points $\{x_n\}$ (vers un point x_0) s'y traduit par la convergence uniforme presque partout dans $[0,1]$ de la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ (vers la fonction $x_0(t)$).

4. *Soit* (m) *l'ensemble des suites bornées de nombres.* En posant

$$(x, y) = \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} |\xi_n - \eta_n|,$$

on obtient d'une façon évidente de (m) un espace (D) complet.

5. *Soit* (C) *l'ensemble des fonctions continues* dans $[0,1]$. Posons pour tout couple x, y de ses éléments

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

L'ensemble (C) forme alors un espace (D) complet; la convergence d'une suite de ses points $\{x_n\}$ (vers un point x_0) se ramène à la convergence uniforme dans $[0,1]$ de la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ (vers la fonction $x_0(t)$).

6. *Soit* (c) *l'ensemble des suites convergentes* de nombres. En définissant pour tout couple x, y de ses éléments leur distance (x, y) tout comme nous l'avons fait dans l'ensemble (m), on voit facilement que l'ensemble (c) forme également un espace (D) complet.

7. *Soit* $(C^{(p)})$ *l'ensemble des fonctions à p-ième dérivée continue* dans $[0,1]$. En posant

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(p)}(t) - y^{(p)}(t)|,$$

nous en obtenons un espace (D) complet. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points $\{x_n\}$ y soit convergente (vers un point x_0) est que la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$, de-même que celle des fonctions $\{x_n^{(p)}(t)\}$, convergent uniformément dans $[0,1]$ (la première vers la fonction $x_0(t)$ et la seconde vers la fonction $x_0^{(p)}(t)$).

8. *Soit* $(L^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ *l'ensemble des fonctions à p-ième puissance sommable* dans $[0, 1]$. En posant

$$(x, y) = \left[\int^{1} | x(t) - y(t) \right.$$

nous voyons que l'ensemble $(L^{(p)})$ devient un espace (D) complet. Pour qu'une suite $\{x_n\}$ de ses points soit convergente (vers le point x_0), il faut et il suffit, que la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ soit dans $[0, 1]$ à p-ième puissance convergente en moyenne (vers la fonction $x_0(t)$).

9. *Soit* $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ *l'ensemble des suites de nombres tels que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p$ *est convergente.* En posant pour les éléments x, y de $(l^{(p)})$

$$(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n - \eta_n |^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

on en obtient un espace (D) complet.

10. *L'ensemble des fonctions analytiques* $f(z)$ *uniformément continues* dans le cercle $|z| \leqslant 1$ forme un espace (D) complet, lorsqu'on définit la distance de deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ comme

$$\max_{|z| \leqslant 1} | f(z) - \varphi(z) |.$$

Il est à remarquer que l'on peut définir *les ensembles des fonctions à n variables correspondant aux exemples* 3, 5, 7 et 8.

§ 8. *Ensembles dans les espaces métriques.*

Soient E un espace (D) quelconque et G un ensemble arbitraire d'élements (de points) de E.

Un point x_0 est dit *point d'accumulation* de l'ensemble G, lorsqu'il existe une suite de points $\{x_n\}$ telle que $x_0 \neq x_n \subset G$ pour tout n et que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. L'ensemble de tous les points

d'accumulation de G s'appelle son *ensemble dérivé* et on le désigne par G'. L'ensemble

$$\overline{G} = G + G'$$

porte le nom de *fermeture* de l'ensemble G; l'ensemble G s'appelle *fermé*, lorsque $G' \subset G$ et il s'appelle *parfait*, lorsque $G' = G$. On dit d'un ensemble G qu'il est *ouvert*, lorsque son complémentaire (c. à d. l'ensemble $E - G$) est un ensemble fermé. Tout ensemble ouvert s'appelle aussi *entourage* (ou *voisinage*) de chacun de ses points.

Etant donné un point $x_0 \subset E$ et un nombre $r_0 > 0$, l'ensemble de tous les points x tels que $(x, x_0) \leqslant r_0$ s'appelle une *sphère* et celui des x tels que $(x, x_0) < r_0$ s'appelle une *sphère ouverte*; le point x_0 est dit *centre* et le nombre r_0 *rayon* de cette sphère, resp. de cette sphère ouverte. On dit d'un ensemble G, qu'il est *dense*, lorsque $\overline{G} = E$ et qu'il est *non dense*, lorsque $\overline{G}$ ne contient aucune sphère.

L'espace E est dit *séparable*, lorsqu'il contient un ensemble dense dénombrable. Il est facile de voir que *tout espace métrique compact* (c. à d. dont toute suite infinie de points contient une suite convergente; cf. p. 9) *est séparable.*

Un ensemble G est dit *de I-e catégorie*, lorsqu'il est une somme dénombrable d'ensembles non denses; dans le cas contraire il est dit *de II-e catégorie.* Un ensemble G est *de I-e catégorie dans un point* x_0, lorsqu'il existe un entourage V de x_0 tel que l'ensemble $G \cdot V$ est de I-e catégorie; si tous les entourages du point x_0 sont dépourvus de cette propriété, on dit que l'ensemble G est *de II-e catégorie au point* x_0.

On peut démontrer le suivant

Théorème 1. *Si un ensemble G situé dans un espace métrique quelconque E est de II-e catégorie, il existe dans E une sphère K telle que l'ensemble G est de II-e catégorie en tout point de G K*[1]).

[1]) Pour la démonstration voir S. Banach, *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, Fundamenta Mathematicae XVI (1930), p. 395.

Admettons à présent que E soit un espace (D) *complet.* Nous allons démontrer le

Lemme. *Etant donnée dans E une suite $\{K_n\}$ de sphères de rayons r_n telles que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$, il existe un point commun à toutes ces sphères.*

Démonstration. Soit x_n le centre de la sphère K_n. On a par hypothèse pour $p < q$ naturels $x_q \subset K_q \subset K_p$, d'où

$$(x_p, x_q) \leqslant r_p. \tag{7}$$

Il en résulte que la suite de points $\{x_n\}$ est convergente. En posant (l'espace E étant complet) $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, on a pour $p < q$ selon (7) $(x_p, x_0) \leqslant (x \quad x_q) + (x_q, x_0) \leqslant r_p + (x_q, x_0)$, d'où $(x_p, x_0) \leqslant r_p$. Or, p étant arbitraire, le point x_0 appartient à toutes les sphères K_n, c. q. f. d.

Une simple conséquence de ce lemme est le

Théorème 2. *Tout espace métrique et complet E est de II-e catégorie.*

Démonstration. Supposons par contre que

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{8}$$

où chacun des ensembles G_n est non dense. Il existe par conséquent une suite de sphères $\{K_n\}$ de rayons $\{r_n\}$ à propriétés suivantes:

$$K_1 \cdot G_1 = 0, \ r_1 < 1 \quad \textit{et} \quad K_{n+1} \subset K_n, \ K_{n+1} \cdot G_{n+1} = 0, \ r_{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

En vertu du lemme, il existe donc un point x_0 qui appartient à toutes ces sphères. Or, comme $K_n \cdot G_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, ce point ne peut appartenir à aucun E_n, contrairement à (8).

Soit maintenant E un espace (D) quelconque et E^* un ensemble arbitraire de points de E. Si l'on conserve pour les élements de E^* la même definition de la distance que celle adoptée dans l'espace E, on obtient de E^* également un certain espace (D).

Considérons un ensemble $G \subset E^*$. S'il est p. ex. non dense, lorsqu'on l'envisage dans l'espace E^*, on dit qu'il est *non dense par rapport à (l'ensemble) E^**; ce n'est que dans le cas où $E^* = E$ que nous omettons d'habitude les mots „par rapport à (l'ensemble) E^*". On fait de-même, lorsqu'il s'agit des autres définitions qui ont été introduites au début de ce §.

Le théorème 1 implique que si l'ensemble G est de I-e catégorie dans tous ses points par rapport à E^*, il est de I-e catégorie par rapport à E^*. D'une façon analogue, le théorème 2 implique que lorsque l'espace métrique E est complet et l'ensemble E^* est fermé, cet ensemble est de II-e catégorie par rapport à lui-même.

Considérons dans un espace (D) arbitraire E la plus petite classe K d'ensembles de cet espace satisfaisant aux conditions suivantes:

1) tout ensemble fermé appartient à K,

2) toute somme dénombrable d'ensembles appartenant à K appartient à K,

3) tout complément d'un ensemble appartenant à K appartient à K.

Les ensembles de la classe K s'appellent „*ensembles mesurables* (B)". On dit d'un ensemble G qu'il *remplit la condition* · *Baire*, lorsque tout ensemble parfait $P (\neq 0)$ contient un point x_0 tel qu'au moins un des ensembles: $P \cdot G$ et $P - G$ est de I-e catégorie dans le point x_0 par rapport à P.

On a le

Théorème 3. *Tout ensemble mesurable* (B) *remplit la condition de Baire* [1]).

§ **9.** *Opérations dans les espaces métriques.*

Soient E et E_1 des ensembles non vides arbitraires. Si l'on fait correspondre à tout élément $x \subset E$ un certain élément de E_1

[1]) Pour la démonstration cf. S. Banach, l. c., p. 398.

on dit qu'une *opération* est définie dans l'ensemble E. L'élément correspondant à x s'appelle *valeur* de cette opération en x; l'ensemble E porte le nom de *domaine* et l'ensemble des valeurs celui de *contredomaine* de l'opération considérée. Dans le cas particulier où les valeurs de l'opération donnée sont des nombres, on l'appelle d'habitude une *fonctionnelle*.

Ceci dit, admettons que l'ensemble E constitue un espace (D) et soit $U(x)$ une opération ayant E pour domaine et un certain espace (D) pour contredomaine. L'opération $U(x)$ s'appelle *continue au point* x_0, lorsque, pour toute suite de points $\{x_n\}$ convergente vers le point x_0, on a $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$; l'opération $U(x)$ s'appelle *continue dans* E, lorsqu'elle l'est en tout point de cet espace. Etant donnée une suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ et une opération $U_0(x)$ définies dans E et les contredomaines de toutes ces opérations faisant partie d'un même espace (D), on dit que cette suite d'opérations est *convergente au point* x_0 vers l'opération $U_0(x)$, lorsque la suite des valeurs $U_n(x_0)$ converge vers $U_0(x_0)$; la suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ est *convergente dans* E *vers l'opération* $U_0(x)$, lorsqu'elle l'est en tout point de E. Si la suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ est convergente dans E vers l'opération $U_0(x)$, cette dernière opération s'appelle *limite de* $\{U_n(x)\}$ *dans* E. Au lieu de dire „opération continue dans E", on dit plus court „opération continue“, lorsqu'il est entendu de quel espace il s'agit; on fait de-même pour les autres termes.

Soit K la plus petite classe d'opérations (ayant pour domaine commun un espace (D) donné E et pour contredomaines respectifs des ensembles situés également dans un certain espace (D)) qui satisfait aux conditions:

1) toute opération continue appartient à K,

2) toute limite d'une suite convergente d'opérations qui appartiennent à K appartient à K.

Les opérations de cette classe portent le nom *d'„opérations mesurables* (B)“.

On dit d'une opération $U(x)$ à domaine E et à contredomaine étant également un espace (D) qu'elle *remplit la condition de Baire*, lorsque dans tout ensemble parfait non vide $P \subset E$ il existe un ensemble G de I-e catégorie par rapport à P et tel que l'opération $U(x)$, considérée dans l'espace $P - G$, est continue dans cet espace.

On a le

Théorème 4. *Toute opération mesurable (B) remplit la condition de Baire* [1]).

On peut démontrer également le

Théorème 5. *Si l'opération $U(x)$ définie dans l'espace E y est une limite d'opérations continues, il existe dans E un ensemble G de I-e catégorie tel que l'opération $U(x)$ est continue en chaque point de l'ensemble $E - G$.*

Le théorème suivant établit une relation entre les ensembles mesurables (B) et les opérations mesurables (B); soient E l'espace (D) où elles sont définies et E_1 l'espace qui contient leurs valeurs.

Théorème 6. *L'opération $U(x)$ étant mesurable (B), pour tout ensemble $G_1 \subset E_1$ mesurable (B) l'ensemble G des points x tels que $U(x) \subset G_1$ est mesurable (B)* [2]).

Théorème 7. *Si les espaces E et E_1 sont séparables et l'opération $U(x)$ est continue dans E, alors les images des ensembles $G \subset E$ mesurables (B) remplissent la condition de Baire. Si, en outre, $x \neq x'$ entraîne toujours $U(x) \neq U(x')$, les images des ensembles mesurables (B) sont aussi mesurables (B).*

La première partie du théorème résulte du fait que l'image continue d'un ensemble mesurable (B) est toujours un ensemble ainsi dit „analytique“ [3]) et que tout ensemble analytique remplit la condition de Baire [4]). La démonstration de la deuxième

[1]) Pour la démonstration cf. S. Banach, l. c., p. 397.

[2]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 195, II.

[3]) Cf. p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 179, 208 et 209, II.

[4]) Cf. O. Nikodym, *Sur une propriété de l'opération A*, Fundamenta Mathematicae VII (1925), p. 149—154; la démonstration pour les espaces eucli-

partie du théorème se trouve aussi dans le livre de F. Hausdorff[1]).

Théorème 8. *Si les opérations $U'(x)$ et $U''(x)$ sont mesurables (B), la fonctionnelle $(U'(x), U''(x))$ l'est également.*

La démonstration résulte du fait que si les opérations $U'(x)$ et $U''(x)$ sont continues, la fonctionnelle $(U'(x), U''(x))$ est aussi continue et que pour tout point $y_0 \subset E_1$ la fonctionelle $(y, y_0) = (y_0, y)$ est continue dans E_1.

Théorème 9. *$\{U_n(x)\}$ étant une suite d'opérations mesurables (B), l'ensemble des points où cette suite est convergente est un ensemble mesurable (B).*

Démonstration. Soit pour p, q et r naturels $G_{p,q,r}$ l'ensemble des points x tels que $(U_p(x), U_q(x)) \leqslant \frac{1}{r}$. En vertu des théorèmes 6 et 8 les ensembles $G_{p,q,r}$ sont mesurables (B). Or, on a $G = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=p}^{\infty} G_{p,q,r}$, donc G est mesurable (B).

Théorème 10. *$\{U'_n(x)\}$ et $\{U''_n(x)\}$ étant des suites d'opérations mesurables (B), si pour tout $x \subset E$ on a $\overline{\lim_{n\to\infty}} (U'_n(x), U''_n(x)) < \infty$, la fonctionnelle $\overline{\lim_{n\to\infty}} (U'_n(x), U''_n(x))$ est mesurable (B).*

Démonstration. Posons pour tout couple de nombres naturels p, q et pour tout point x:

$$F_{p,q}(x) = \max_{p \leqslant n \leqslant p+q+1} (U'_n(x), U''_n(x)).$$

On a évidemment pour tout x:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (U'_n(x), U''_n(x)) = \lim_{p\to\infty} \lim_{q\to\infty} F_{p,q}(x).$$

diens, qui s'y trouve, s'applique facilement au cas général, lorsqu'on tient compte du théorème précité sur les ensembles de I-e catégorie (S. Banach, l. c., p. 395).

[1]) l. c., p. 208, II.

Il suffit donc de montrer que chacune des fonctionnelles $F_{p,q}(x)$ est mesurable (B). Or, d'après le théorème 8, chacune des fonctionnelles $F_{p,1}(x) = (U'_p(x), U''_p(x))$ est mesurable (B) et comme on a pour tout $q > 1$:

$$F_{p,q+1}(x) = F_{p,q}(x) + F_{p+q,1}(x) + |F_{p,q}(x) - F_{p+q,1}(x)|,$$

on en conclut par induction, en appliquant encore le théorème 8, que toutes les fonctionnelles $F_{p,q}(x)$ sont mesurables (B).

Théorème 11. *Etant donnée une suite de fonctionnelles continues et non-négatives $\{F_n(x)\}$ telles que l'on a $\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) < \infty$ pour tout élément x d'un ensemble $G \subset E$ de II-e catégorie, il existe une sphère $K \subset E$ et un nombre N tel que $F_n(x) \leqslant N$ pour tout $x \subset K$ et pour tout $n = 1, 2, \ldots$*

Démonstration. Les ensembles G_i des points x tels que $F_n(x) \leqslant i$ pour $n = 1, 2, \ldots$ sont évidemment fermés et on a $G \subset \sum_{i=1}^{\infty} G_i$; il existe donc un indice N tel que G_N est de II-e catégorie. Comme ensemble fermé, il contient par conséquent une sphère K en question.

CHAPITRE I.

Groupes.

§ 1. *Définition des espaces du type* (G).

Etant donné un espace (D) complet E, admettons qu'à tout couple ordonné d'éléments x, y de l'espace E vienne correspondre d'une façon univoque un élément z de cet espace appelé *somme de* x *et* y et que nous désignerons par le symbole $x+y$.

Admettons en outre que E soit un *groupe* par rapport à cette somme, c'est-à-dire que:

I_1. $$(x+y)+z = x+(y+z),$$

I_2. *il existe dans* E *un élément-zéro* Θ *tel que l'on a*

$$\Theta + x = x + \Theta = x \text{ pour tout } x \subset E,$$

I_3. *à tout élément* x *de* E *correspond un élément* (que nous désignerons par $-x$) *et qui satisfait à l'équation*

$$x+(-x) = \Theta .$$

Il résulte facilement de ces axiomes que:

a) *il n'existe dans* E *qu'un seul élément-zéro* Θ,

a) *on a* $(-x)+x = \Theta$ *pour tout* $x \subset E$,

c) $x+y = x+z$ *entraîne* $y = z$.

Admettons encore que les axiomes suivants soient remplis:

II_1. $$\lim x_n = x \text{ entraîne } \lim(-x_n) = -x,$$

II_2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *entraînent* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

Les espaces (D) complets satisfaisant à ces axiomes seront nommés *espaces du type* (G).

Remarque. Nous écrirons $x - y$ au lieu de $x + (-y)$ et $-x + y$ au lieu de $(-x) + y$.

§ 2. *Propriétés des sous-groupes.*

Soit E un espace du type (G). Etant donné un élément $x \subset E$ et un ensemble $H \subset E$, nous désignerons par xH, resp. par Hx, l'ensemble de tous les éléments $y \subset E$ tels que $y = x + z$, resp. que $y = z + x$, où $z \subset H$.

Evidemment, on a toujours les identités

$$x(H_1 + H_2) = xH_1 + xH_2,$$

$$x(H_1 - H_2) = xH_1 - xH_2,$$

$$x(H_1 \cdot H_2) = (xH_1) \cdot (xH_2),$$

et les identités analogues pour $H_1 x$ et $H_2 x$.

On montre facilement que, suivant que H est un ensemble fermé, ouvert, non dense, de I-e, resp. de II-e catégorie, ou mesurable (B), l'ensemble xH est également fermé, ouvert, non dense, etc. Si z est un point intérieur de H, $x + z$ est un point intérieur de xH.

Un ensemble non vide $H \subset E$ porte le nom de *sous-groupe* de E, lorsque les conditions $x \subset H$ et $y \subset H$ entraînent $x + y \subset H$ et $-x \subset H$. On a alors évidemment aussi $\Theta \subset H$.

Un ensemble est dit *connexe*, lorsqu'il n'est pas somme de deux ensembles non vides disjoints et fermés dans lui. Si E est un ensemble connexe et H en est un sous-ensemble à la fois fermé et ouvert, on a $H = E$, car autrement l'ensemble $E - H$ serait aussi non vide et fermé.

Théorème 1. *Tout sous-groupe $H \subset E$ qui est de II-e catégorie et remplit la condition de Baire, est à la fois fermé et ouvert dans E.*

Démonstration. En vertu du th. 1, p. 13, il existe une sphère ouverte K dans laquelle H est partout de II-e catégorie. On peut évidemment admettre que le centre y_0 de K appartient à H. Comme H remplit la condition de Baire, l'ensemble $K-H$ est de I-e catégorie. Or, y_0 étant un point intérieur de K, le point $\Theta=-y_0+y_0$ est un point intérieur de $(-y_0)K$. Il existe donc une sphère ouverte $K_1 \subset (-y_0)K$ de centre Θ. On a $(-y_0)[K-H]=$ $=(y_0)K-(-y_0)H$ et comme $(-y_0)H=H$, puisque H est un sous-groupe, il vient $(-y_0)[K-H]=(-y_0)K-H \supset K_1-H$, de sorte que, $K-H$ et par conséquent $(-y_0)[K-H]$, étant de I-e catégorie, K_1-H est aussi de I-e catégorie.

D'autre part, pour tout $x \subset K_1$ on a $x \subset xK_1$, puisque $\Theta \subset K_1$ et $x+\Theta=x$. Par conséquent $K_1 \cdot xK_1 \neq 0$. Il existe donc une sphère ouverte $K_2 \subset K_1 \cdot xK_1$ de centre x. On a $K_2-H \subset K_1-H$ et $K_2-xH \subset xK_1-xH=x[K_1-H]$, de sorte que les ensembles K_2-H et K_2-xH sont également de I-e catégorie.

Il en résulte que $H \cdot xH \neq 0$; il existe donc un y tel que $y \subset H$ et $y \subset xH$, d'où $-x+y \subset H$ et par conséquent, H étant un sous-groupe, $-x=-x+y-y \subset H$, donc $x \subset H$.

Il est ainsi démontré que $K_1 \subset H$ et, par suite, que Θ est un point intérieur de H. Comme pour tout $y \subset H$ on a $yH=H$ et $y=y+\Theta$, chaque point y de H en est également un point intérieur. H est donc un ensemble *ouvert*.

Pour prouver qu'il est à la fois *fermé*, posons $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$ où $y_n \subset H$ pour tout $n=1,2,\ldots$ Or, comme $\lim\limits_{n\to\infty}(y-y_n)=\Theta \subset K_1 \subset H$, il existe un n tel que $y-y_n \subset K_1 \subset H$, d'où $y=y-y_n+y_n \subset H$, c. q. f. d.

Ce théorème implique le suivant

Théorème 2. *L'espace E étant connexe, tout sous-groupe $H \subset E$ qui est de II-e catégorie et remplit la condition de Baire est identique à E.*

Remarque. Comme tout ensemble mesurable (B) remplit la condition de Baire, les théorèmes 1 et 2 subsistent en particulier, lorsque H est un ensemble mesurable (B).

§ 3. *Opérations additives et linéaires.*

Soient E et E_1 des espaces du type (G) et $U(x)$ une opération définie dans E et dont le contredomaine est situé dans E_1.

L'opération $U(x)$ s'appelle *additive*, lorsque

$$U(x+y) = U(x) + U(y) \quad \textit{pour tous} \quad x \subset E \textit{ et } y \subset E.$$

On a alors $U(x) = U(x+\Theta) = U(x) + U(\Theta)$, d'où

$$U(\Theta) = \Theta,$$

et comme $\Theta = U(\Theta) = U(x-x) = U(x) + U(-x)$, on a

$$U(-x) = -U(x).$$

L'opération additive et continue s'appelle *linéaire*.

Théorème 3. *Toute opération additive et continue dans un point est une opération linéaire.*

Démonstration. Soit x_0 un point de continuité de l'opération additive $U(x)$. Soient $x_n \subset E$, $x \subset E$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. On a $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x + x_0) = x_0$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n - x + x_0) = U(x_0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}[U(x_n) - U(x) + U(x_0)] = U(x_0)$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$, de sorte que l'opération en question est continue aussi dans le point x arbitraire, c. à. d. qu'elle est linéaire.

Théorème 4. *Toute opération additive mesurable* (B) *est une opération linéaire.*

Démonstration. En vertu du théorème 4, p. 17, l'opération $U(x)$ considérée remplit la condition de Baire. Elle est donc continue sur un certain ensemble H où $E-H$ est de I-e catégorie. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$. L'ensemble $x_n[E-H] = E - x_n H$ étant pour tout $n = 1, 2, \ldots$ de I-e catégorie, il en est de-même de l'ensemble

$$(E-H)+\sum_{n=1}^{\infty} x_n [E-H] = E-H+\sum_{n=1}^{\infty}(E-x_n H) \supset E-H\cdot\prod_{n=1}^{\infty} x_n H,$$

qui par conséquent (en vertu du théorème 2, p. 14) n'épuise pas l'espace E. Il existe donc un point x tel que l'on a

$$x \subset H \quad et \quad x \subset x_n H \quad pour\ tout \quad n = 1, 2, \ldots,$$

d'où $(-x_n + x) \subset H$, et comme $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n + x) = x$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} U(-x_n + x) = U(x)$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}[U(-x_n) + U(x)] = U(x)$ et finalement $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. L'opération $U(x)$ est donc continue au point Θ de E et par conséquent elle est linéaire d'après le théorème 3 qui vient d'être démontré.

Remarque. Comme on le voit de la marche du raisonnement, le théorème reste vrai pour les opérations additives qui remplissent la condition de Baire.

Théorème 5. *L'espace E étant connexe, si $\{U_n(x)\}$ est une suite d'opérations linéaires, l'ensemble des points x pour lesquels il existe la limite $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$ est soit de I-e catégorie, soit identique à E.*

La démonstration résulte facilement du théorème 2, p. 22, l'ensemble des points x où la suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ est convergente étant selon le théorème 9, p. 18, mesurable (B), donc selon le théorème 3, p. 15, remplissant la condition de Baire et, en outre, tout ensemble des points de convergence constituant un groupe.

§ 4. *Un théorème sur la condensation des singularités.*

Théorème 6. *Etant donnés un espace E connexe et une suite double d'opérations linéaires $\{U_{p,q}(x)\}$, si pour une suite de points $\{x_p\}$ la limite $\lim\limits_{q\to\infty} U_{p,q}(x_p)$ n'existe pour aucun $p = 1, 2, \ldots$, alors l'ensemble H des points x tels que la limite $\lim\limits_{q\to\infty} U_{p,q}(x)$ n'existe*

pour aucun $x \subset H$ *quel que soit* $p = 1, 2, \ldots,$ *est de II-e catégorie et son complément* $E - H$ *est de I-e catégorie.*

Démonstration. Soit pour tout $p = 1, 2, \ldots$ H_p l'ensemble des points de convergence de la suite $\{U_{p,q}(x)\}$. On a $H_p \neq E$, puisque par hypothèse $x_p \subset E - H_p$. En vertu du théorème 5, p. 24, l'ensemble H_p est de I-e catégorie. Il en est donc de-même de l'ensemble $\sum\limits_{p=1}^{\infty} H_p$, ce qui achève la démonstration, car on a $H = E - \sum\limits^{\infty} H_p$.

CHAPITRE II.

Espaces vectoriels généraux.

§ 1. *Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels.*

Etant donné un ensemble non vide E, admettons qu'à tout couple ordonné x, y d'éléments de E vienne correspondre un élément $x+y$ de E (dit *somme* de x et y) et que pour tout nombre t et pour tout $x \subset E$ un élément tx de E (dit *produit* du nombre t par l'élément x) soit défini de façon que ces opérations, à savoir *l'addition des éléments* et la *multiplication des nombres par les éléments* remplissent les conditions suivantes (où x, y et z désignent des éléments arbitraires de E et a, b des nombres):

1) $x+y=y+x$,

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

3) $x+y=x+z$ *entraîne* $y=z$,

4) $a(x+y)=ax+ay$,

5) $(a+b)x=ax+bx$,

6) $a(bx)=(ab)x$,

7) $1 \cdot x=x$.

Dans ces hypothèses, nous disons que l'ensemble E constitue un espace *vectoriel* ou *linéaire.* Il est facile de voir qu'il existe alors un et un seul élément — désignons-le par Θ — tel que l'on a toujours $x+\Theta=x$ et que l'égalité $ax=bx$ où

$x \neq \Theta$ donne $a = b$; de plus, que l'égalité $ax = ay$ où $a \neq 0$ implique $x = y$.

Posons, en outre, par définition:

$$-x = (-1)\,x \qquad et \qquad x - y = x + (-y).$$

Les exemples 1—10 des espaces (D), décrits p. 9 — 12 sont à la fois autant d'exemples des espaces vectoriels, en y admettant les définitions habituelles de l'addition des éléments et de la multiplication des nombres par eux.

Lorsque $x \neq y$, nous entendons par le *segment* unissant x et y l'ensemble de tous les éléments de la forme $tx + (1-t)\,y$ où t est un nombre quelconque de l'intervalle $[0,1]$.

Un ensemble $G \subset E$ est dit *convexe*, lorsqu'il contient tout segment qui en unit les éléments arbitraires.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des éléments d'un espace vectoriel, l'expression

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres réels arbitraires, s'appelle une *combinaison linéaire* des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§ 2. *Extension des fonctionnelles additives et homogènes.*

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels et $f(x)$ une opération définie dans E et dont le contredomaine est situé dans E_1.

L'opération $f(x)$ s'appelle *additive*, lorsqu'on a pour tout couple d'éléments x, y:

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

elle est dite *homogène*, lorsqu'on a pour tout élément x et tout nombre t:

$$f(t\,x) = t\,f(x).$$

Théorème 1 [1]. *Etant données*

[1]) Cf. S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires II.* Studia mathematica I (Lwów 1929), p. 223—239, en particulier p. 226.

1^0 *une fonctionnelle* $p(x)$ *définie dans* E *et telle que l'on ait pour tous* x *et* y *de* E

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \textit{te} \quad p(tx) = t\,p(x) \ \textit{pour}\ t \geqslant 0,$$

2^0 *une fonctionnelle additive et homogène* $f(x)$ *définie dans un espace vectoriel* $G \subset E$ (bien entendu, avec les mêmes définitions des opérations fondamentales) *et telle que l'on ait pour tout* $x \subset G$

$$f(x) \leqslant p(x),$$

il existe toujours une fonctionnelle additive et homogène $F(x)$ *définie dans* E *et telle que l'on a*

$$F(x) \leqslant p(x) \ \textit{pour tout}\ x \subset E \ \textit{et}\ F(x) = f(x) \ \textit{pour tout}\ x \subset G$$

Démonstration. Nous pouvons admettre que $G \neq E$; soit $x_0 \subset E - G$. On a selon 2^0 pour $x' \subset G$ et $x'' \subset G$:

$$f(x'') - f(x') = f(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') = p\,[(x'' + x_0) + (-x' - x_0)] \leqslant$$
$$\leqslant p(x'' + x_0) + p(-x' - x_0),$$

d'où

$$-p(-x' - x_0) - f(x') \leqslant p(x'' + x_0) - f(x'').$$

Les nombres

$$m = \text{borne} \sup_{x \subset G} [-p(-x - x_0) - f(x)] \ \textit{et}\ M = \text{borne} \inf_{x \subset G} [p(x + x_0) - f(x)]$$

sont donc finis et $m \leqslant M$. Etant donné un r_0 tel que $m \leqslant r_0 \leqslant M$, on a pour tout $x \subset G$

$$(1) \qquad -p(-x - x_0) - f(x) \leqslant r_0 \leqslant p(x + x_0) - f(x).$$

Considérons l'ensemble G_0 de tous les éléments y de la forme

$$(2) \qquad y = x + t\,x_0 \quad \textit{où}\ x \subset G\ \textit{et}\ t\ \textit{est un nombre.}$$

Evidemment G_0 constitue un espace vectoriel. Posons

$$(3) \qquad \varphi(y) = f(x) + t\,r_0,$$

où l'élément y est défini par (2); comme $x_0 \subset E - G$, tout $y \subset G_0$ admet exactement *une* représentation de la forme (2), de sorte

que la fonctionnelle $\varphi(y)$ se trouve définie dans G_0 d'une manière univoque. On voit aussi qu'elle y est additive et homogène et qu'elle coïncide dans G_0 avec $f(x)$. Nous allons montrer que l'on a

$$\text{(4)} \qquad \varphi(y) \leqslant p(y) \text{ pour tout } y \subset G_0.$$

En effet, si l'on écrit y dans la forme (2), on peut admettre que $t \neq 0$. En mettant dans l'inégalité (1) $\frac{x}{t}$ au lieu de x et en multipliant par t son membre droit ou gauche, suivant que $t > 0$ ou $t < 0$, on obtient $t\, r_0 \leqslant p(x + t\, x_0) - f(x)$, ce qui entraîne d'après (3) l'inégalité (4).

Ceci établi, on voit qu'il suffit de bien ordonner l'ensemble $E - G$, pour arriver par des extensions successives de $f(x)$, selon le procédé décrit tout à l'heure, à la fonctionnelle $F(x)$ satisfaisant à la thèse du théorème.

Corollaire. *Etant donnée une fonctionnelle $p(x)$ définie dans E et telle que l'on ait pour tout $x \subset E$ et $y \subset E$*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{et} \quad p(t\,x) = t\,p(x) \text{ pour } t \geqslant 0,$$

il existe une fonctionnelle additive et homogène $F(x)$ définie dans E et telle que l'on a pour tout $x \subset E$

$$F(x) \leqslant p(x).$$

Considérons, en effet, un $x_0 \subset E$ et désignons par G l'ensemble de tous les éléments de la forme tx_0 où t est un nombre arbitraire. G constitue alors un espace vectoriel. En y posant $f(t\,x_0) = t\,p(x_0)$, on aura $f(t\,x_0) \leqslant p(t\,x_0)$ quel que soit t, car $t \geqslant 0$ entraîne $t\,p(x_0) = p(t\,x_0)$ et $t < 0$ entraîne $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$, d'où $p(x_0) \geqslant -p(-x_0)$ et finalement $t\,p(x_0) \leqslant -t\,p(-x_0) = p(t\,x_0)$; on n'a donc qu'à appliquer le théorème 1, qui précède.

§ 3. *Applications: généralisation des notions d'intégrale, de mesure et de limite.*

Nous allons envisager maintenant quelques applications intéressantes du théorème 1 et du corollaire.

1. Soit E l'ensemble des fonctions réelles bornées $x(s)$ définies sur une circonférence de longueur 1 et où s en désigne des arcs comptés à partir d'un point fixe dans un même sens de parcours. En admettant les définitions habituelles des opérations, E constitue un espace vectoriel.

Or, pour tout élément $x = x(s)$ de E, convenons d'entendre par $p(x)$ la *borne inférieure* de tous les nombres $M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de la forme

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \underset{-\infty<s<+\infty}{\text{borne sup}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s + \alpha_k),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est une suite arbitraire de nombres. La fonctionnelle $p(x)$ remplit alors toutes les hypothèses du corollaire. Il est, en effet, évident que l'on a en premier lieu toujours $p(tx) = t\,p(x)$ pour $t \geqslant 0$.

En second lieu, étant donnés deux éléments $x = x(s)$ et $y = y(s)$ de E et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe des suites finies de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v$ telles que

$$(5) \quad M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u) \leqslant p(x) + \varepsilon \quad et \quad M(y; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v) \leqslant p(y) + \varepsilon.$$

En rangeant tous les nombres $\alpha_i + \beta_j$ où $i = 1, 2, \ldots, u$ et $j = 1, 2, \ldots, v$ d'une manière quelconque en une suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{uv}$, on a

$$(6) \qquad p(x + y) \leqslant M(x + y; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{uv})$$

et on vérifie facilement que

$$(7) \quad M(x+y; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{uv}) \leqslant M(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u) + M(y; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v).$$

Les rélations (5)—(7) entraînent $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, ce qui prouve, le nombre ε étant supposé arbitraire, que $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Ceci établi, considérons donc la fonctionnelle $F(x)$ qui existe en vertu du corollaire.

Or, si $x(s) = 1$, on a $p(x) = 1$ et $p(-x) = -1$ et comme $F(x) \leqslant p(x)$ et $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$, on obtient $F(x) = 1$.

Si $x(s) \geqslant 0$, on a $p(-x) \leqslant 0$ et d'autre part $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$, donc aussi $F(x) \geqslant 0$.

En outre, la fonctionnelle $F(x)$ possède la propriété de remplir pour tout nombre s_0 l'égalité $F[x(s+s_0)] = F[x(s)]$. Si l'on pose, en effet, $y(s) = x(s+s_0) - x(s)$ et $\alpha_k = (k-1)\, s_0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, on a pour tout n:

$$p(y) \leqslant M(y; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \underset{-\infty < s < +\infty}{\text{borne sup}} [x(s + n s_0) - x(s)],$$

donc $p(y) \leqslant 0$; on obtient d'une façon analogue que $p(-y) \leqslant 0$. Mais $F(y) \leqslant p(y)$ et $F(y) = -F(-y) \geqslant -p(-y)$, d'où $F(y) = 0$.

Ainsi, en désignant par le symbole $\int x(s)\, ds$ la fonctionnelle $\frac{1}{2}\{F[x(s)] + F[x(1-s)]\}$, on a le théorème:

A toute fonction $x(s)$ de la classe E on peut faire correspondre un nombre $\int x(s)\, ds$ de façon que les conditions suivantes (où $x(s)$ et $y(s)$ sont des fonctions arbitraires de la classe E et a, b, s_0 des nombres) *soient remplies*:

$$1) \quad \int [a\, x(s) + b\, y(s)]\, ds = a \int x(s)\, ds + b \int y(s)\, ds,$$

$$2) \quad \int x(s)\, ds \geqslant 0, \textit{ lorsque } x(s) \geqslant 0,$$

$$3) \quad \int x(s+s_0)\, ds = \int x(s)\, ds,$$

$$4) \quad \int x(1-s)\, ds = \int x(s)\, ds,$$

$$5) \quad \int 1\, ds = 1.$$

Il est facile de vérifier que la fonctionnelle $\int x(s)\, ds$, remplissant les conditions 1)—5), reste toujours comprise entre les intégrales riemanniennes inférieure et supérieure de la fonction $x(s)$.

Par conséquent, pour toute fonction intégrable (R) cette fonctionnelle coïncide avec l'intégrale de la fonction.

Pour les fonctions sommables (L) la fonctionnelle en question ne coïncide pas toujours avec leur intégrale (L). Cependant, en partant de l'espace vectoriel G que constitue précisément la classe de ces fonctions et en y définissant la fonctionnelle $f(x)$ comme l'intégrale (L) de la fonction $x(s) \subset G$, le théorème 1 nous fournit une fonctionnelle $F(x)$ définie dans l'espace E et telle que la fonctionnelle $\int ds = \frac{1}{2}\{F[x(s)] + F[x(1-s)]\}$ remplit évidemment toutes les conditions 1) — 5) et coïncide en outre, pour toute fonction sommable (L), avec l'intégrale de cette fonction.

2. Considérons à présent la classe K de tous les ensembles situés sur la circonférence en question et désignons par A_0 la circonférence-même. En posant pour tout ensemble A de cette classe $\mu(A) = \int x(s)\, ds$ où $x(s)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble A, donc une fonction de l'espace E envisagé dans **1**, on obtient le théorème:

A tout ensemble A de la classe K on peut attribuer un nombre $\mu(A)$ de façon que les conditions suivantes (où A et B sont des ensembles arbitraires de la classe K) *soient remplies:*

1) $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$, *lorsque* $AB = 0$,

2) $\mu(A) \geqslant 0$,

3) $\mu(A) = \mu(B)$ *pour* $A \cong B$,

4) $\mu(A_0) = 1$.

La fonctionnelle $\mu(A)$, qui remplit les conditions 1) — 4), est comprise entre la mesure jordanienne intérieure et extérieure de l'ensemble A. Par conséquent, pour tout ensemble mesurable (J) cette fonctionnelle coïncide avec la mesure de l'ensemble.

Pour des ensembles mesurables (L) quelconques la fonctionnelle en question ne coïncide pas toujours avec leur mesure (L),

mais, tout comme précédemment, on peut s'arranger de façon que cette propriété soit également remplie [1]).

3. Soit E l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées $x(s)$ définies dans $[0, +\infty]$; avec les définitions habituelles des opérations c'est un espace vectoriel.

Pour tout élément $x = x(s)$ de E désignons par $p(x)$ la borne inférieure de tous les nombres $\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s + \alpha_k)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ est une suite finie arbitraire de nombres positifs. On vérifie sans peine que la fonctionnelle $p(x)$, définie ainsi dans l'espace E, satisfait aux hypothèses du corollaire. En désignant par le symbole $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s)$ [2]) la fonctionnelle $F(x)$, qui existe en vertu de ce corollaire, on a donc le théorème:

A toute fonction $x(s) \subset E$ on peut faire correspondre un nombre $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s)$ de façon que les conditions suivantes (où $x(s)$ et $y(s)$ sont des fonctions quelconques de E et a, b et $s_0 \geqslant 0$ sont des nombres) *soient remplies:*

1) $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} [a\,x(s) + b\,y(s)] = a \mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s) + b \mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} y(s)$,

2) $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s) \geqslant 0$, *lorsque* $x(s) \geqslant 0$,

3) $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s + s_0) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s)$,

4) $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} 1 = 1$.

La fonctionnelle $\mathop{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty} x(s)$, remplissant les conditions 1) — 4), est comprise constamment entre $\underline{\lim}\, x(s)$ et $\overline{\lim}\, x(s)$. Elle coïncide

[1]) Cf. S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae IV (1923), p. 7 — 33.

[2]) le signe Lim désigne ici une certaine „limite" généralisée, le signe lim étant par contre reservé exclusivement pour la limite dans le sens ordinaire.

par conséquent avec $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ toutes les fois que cette limite au sens ordinaire existe.

4. Soit $\{\xi_n\}$ une suite bornée quelconque. Definissons dans l'intervalle $(0, +\infty)$ la fonction $x(s)$ par la convention: $x(s) = \xi_n$ pour $n-1 < s \leqslant n$ et $n = 1, 2, \ldots$ La fonction $x(s)$ appartient donc à l'ensemble E, envisagé dans **3**. En posant $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname*{Lim}\limits_{s\to\infty} x(s)$, où $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} x(s)$ conserve le sens adopté dans **3**, on a le théorème:

A toute suite bornée $\{\xi_n\}$ *on peut faire correspondre un nombre* $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n$ *de façon que les conditions suivantes* (où $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ sont des suites bornées arbitraires et a et b sont des nombres) *soient remplies:*

1) $\operatorname{Lim}(a\,\xi_n + b\,\eta_n) = a \operatorname{Lim} \xi_n + b \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \eta_n$,

2) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$, *si* $\xi_n \geqslant 0$ *pour tout* $n = 1, 2, \ldots$,

3) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n$,

4) $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Les conditions 1)—4) impliquent que la fonctionnelle $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n$ ainsi définie est comprise toujours entre $\varliminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$ et $\overline{\lim} \xi_n$. Par conséquent, pour toute suite convergente cette fonctionnelle coïncide avec la limite (au sens ordinaire) de la suite [1].

[1] Cf. S. Mazur, *O metodach sumowalności*, Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego (en polonais), Supplément aux Annales de la Soc. Polonaise de Math. (1929), p. 102—107, voir p. 103.

CHAPITRE III.

Espaces du type *(F)*.

§ 1. *Définition et préliminaires.*

Soit E un espace vectoriel (D) complet et assujetti aux conditions suivantes (où x, x_n, y sont des éléments de E et h, h_n sont des nombres):

$$1^0 \ (x, y) = (x - y, \Theta),$$

$$2^0 \ \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \textit{ entraîne } \lim_{n\to\infty} h_n x = \Theta \textit{ pour tout } x,$$

$$3^0 \ \lim_{n\to\infty} x_n = \Theta \textit{ entraîne } \lim_{n\to\infty} h x_n = \Theta \textit{ pour tout } h.$$

Les espaces E à propriétés $1^0 - 3^0$ seront dits *espaces du type* (F). Tous les exemples $1 - 10$ des espaces (D), décrits au § 7 de l'Introduction, p. 9 — 12, sont à la fois, comme il est aisé de voir, autant d'espaces du type (F).

Les conditions $1^0 - 3^0$ entraînent aussitôt les propriétés suivantes de la limite:

a) *lorsque* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *on a* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

Il suffit, en effet, de remarquer que l'on a toujours $(x_n + y_n,\ x + y) = (x_n + y_n - x - y,\ \Theta) \leqslant (x_n - x + y_n - y,\ y_n - y) + (y_n - y,\ \Theta) = (x_n - x,\ \Theta) + (y_n - y,\ \Theta) = (x_n,\ x) + (y_n,\ y)$.

b) *si* $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, *on a* $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x = h\,x$, *quel que soit* $x \subset E$.

On a, en effet, toujours $(h_n x,\ hx) = ((h_n - h)x,\ \Theta)$.

Nous voyons donc que *tout espace du type* (F) *est en même temps un espace du type* (G). Il en résulte que tous les théorèmes du Chapitre I subsistent, lorsque E est supposé un espace du type (F).

Or, il est à remarquer que *les espaces vectoriels du type* (F) *sont connexes*, car pour tout x et y de E l'ensemble des éléments de la forme $hx+(1-h)y$ où $0 \leqslant h \leqslant 1$ est un ensemble connexe contenant les éléments x et y.

Etant donnée une sphère arbitraire K (voir p. 13) dans l'espace E du type (F), il est facile de voir que l'ensemble xK (voir la définition p. 21) est également une sphère.

Soit $h \neq 0$. L'opération $U(x) = hx$ constitue alors une transformation continue et biunivoque de l'espace E en lui-même et on aperçoit aisément que les ensembles fermés, ouverts, non denses, de I-e resp. de II-e catégorie, mesurables (B), se transforment respectivement en ensembles de la même nature.

On a, en particulier, le théorème suivant, qui résulte du théorème 2 (Chap. I, § 2), p. 22, et de la remarque p. 23, tout espace du type (F) étant connexe:

Théorème 1. *E étant un espace du type (F), tout espace linéaire $H \subset E$ mesurable (B) et de II-e catégorie est identique à E.*

§ 2. *Opérations homogènes.*

Nous allons nous occuper maintenant des opérations additives définies dans un espace E du type (F) et dont les contredomaines sont situés dans un espace E_1, également du type (F).

Pour toutes les opérations de ce genre restent vrais les théorèmes 3, 4, 5 et 6 du Chapitre I. De plus, en appelant *homogène* toute opération $U(x)$ qui satisfait pour tout nombre h à l'égalité $U(hx) = hU(x)$, on a le

Théorème 2. *Toute opération linéaire est à la fois homogène.*

Démonstration. L'opération $U(x)$ étant supposée linéaire, il est évident que l'on a pour tout $x \subset E$ et pour tout r rationnel $U(rx) = rU(x)$. Or, si $\{r_n\}$ est une suite de nombres ration-

nels tendant vers h, on a $\lim_{n\to\infty} r_n x = hx$. La continuité de l'opération $U(x)$ donne par conséquent $U(hx) = \lim_{n\to\infty} U(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n U(x) = hx$; l'opération $U(x)$ est donc en effet homogène.

§ 3. *Séries d'éléments. Inversion des opérations linéaires.*

Posons pour abréger

$$|x| = (x, \Theta).$$

On vérifie facilement que l'on a les relations suivantes pour tous x et y de E:

1° $(x, y) = |x - y|$,

2° $|\Theta| = 0$; $x \neq \Theta$ *entraîne* $|x| > 0$,

3° $|-x| = |x|$,

4° $|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$,

5° $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *entraîne* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Etant donnée une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E, on dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est *convergente* vers un élément x, ou que x *est la somme de cette série*, lorsque $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = x$. On l'écrit: $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

La définition de la série implique en outre les relations:

6° $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *entraîne* $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n tel que $|x - \sum_{i=1}^{n} x_i| < \varepsilon$, d'où $|x| \leqslant \varepsilon + |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et, ε étant arbitraire, $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

7° *Si la série* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ *est convergente, la série* $\sum x_i$ *est convergente vers un élément.*

Posons, en effet, $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si $p < q$, on a $|s_p - s_q| = |\sum_{i=p+1}^{q} x_i| \leqslant$ $\leqslant \sum_{i=p+1}^{q} |x_i|$. On voit donc que $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} |s_p - s_q| = 0$. Par conséquent $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est une série convergente vers un élément.

Ceci établi, nous allons démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 3. *Le contredomaine d'une opération linéaire est soit de I-e catégorie, soit identique à E_1.*

Démonstration. Admettons que le contredomaine $H \subset E_1$ de l'opération linéaire $U(x)$ définie dans E soit de II-e catégorie. Nous allons prouver d'abord que

(1) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'image donnée par $U(x)$ de la sphère ouverte $|x| < \varepsilon$ contient une sphère ouverte $|y| < \eta$.*

Etant donné à ce but un $\varepsilon > 0$, désignons pour tout n naturel par G_n l'ensemble des points de la forme $x = n x'$, où $|x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ et par H_n l'image de G_n donnée par $U(x)$, c. à d. l'ensemble des points $y = U(x)$ où $x \subset G_n$. Quel que soit le point x donné, on a toujours $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x = \Theta$; il existe par conséquent un n naturel tel que $\left|\frac{1}{n} x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc tel que $x \subset G_n$. Il en résulte que $E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$ et que $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$.

Or, H étant supposé de II-e catégorie, il en est de-même d'un certain H_{n_0}. Soit K_1 une sphère ouverte de centre y_1 et de rayon η_1 contenue dans H_{n_0}'.

On en déduit aussitôt que la sphère ouverte K_2 de centre $\frac{1}{n_0} y_1$ et de rayon $\frac{1}{n_0} \eta_1$ est contenue dans H_1'. En effet $y \subset K_2$, c'est à dire $\left|y - \frac{1}{n_0} y_1\right| < \frac{1}{n_0} \eta_1$, entraîne $n_0 y \subset K_1$, car $|n_0 y - y_1| =$

$n_0\left(y-\frac{1}{n_0}y_1\right)\Big| \leqslant n_0\left|y-\frac{1}{n_0}y_1\right| < \eta_1$; il existe donc des points $\overline{y}_n \subset H_{n_0}$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y}_n = n_0 y$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n_0}\overline{y}_n = y$ et par conséquent $\frac{1}{n_0}\overline{y}_n \subset H_1$, d'où $y \subset H_1'$.

Soit K_3 une sphère ouverte arbitraire de centre $y_3 \subset H_1$ contenue dans K_2. L'ensemble des points $y_3 - y$ où $y \subset H_1$ admet donc comme point d'accumulation tout point d'une sphère ouverte $|y| < \overline{\eta}$. Or, en posant $y_3 = U(x_3)$ et $y = U(x)$ où x_3 et x appartiennent à G_1, on a $|x_3 - x| \leqslant |x_3| + |x| < \overline{\varepsilon}$ et $U(x_3 - x) = y_3 - y$. Il est ainsi établi que l'ensemble dérivé de l'image de la sphère ouverte $|x| < \overline{\varepsilon}$ contient une sphère ouverte $|y| < \overline{\eta}$.

Soit à présent $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}$ où $i = 1, 2, \ldots$ D'après ce qui précède, il existe une suite de nombres $\eta_i > 0$ tels que l'ensemble dérivé de l'image de la sphère ouverte $|x| < \varepsilon_i$ contient une sphère ouverte $|y_i| < \eta_i$ et on est évidemment libre d'admettre que $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$. Nous allons définir par induction deux suites de points $\{y_n\}$ et $\{x_n\}$ comme il suit. Posons $|y| < \eta = \eta_1$ et soient:

a) y_1 un point arbitraire de E_1 tel que $|y - y_1| < \eta_2$ et x_1 le point de E tel que $U(x_1) = y_1$ et $|x_1| < \varepsilon_1$,

b) y_n un point arbitraire de E_1 tel que $\left|y - \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right| < \eta_{n+1}$ et x_n le point de E tel que $U(x_n) = y_n$ et $|x_n| < \varepsilon_n$.

On a ainsi

$$\sum^{\infty} y_n = y \tag{2}$$

et, comme $|x_n| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \sum^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{3}$$

En vertu de 7° la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est convergente. Soit x la somme de cette série. En vertu de (3) et 6° on a $|x| < \varepsilon$ et en vertu de (2): $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$. La proposition (1) se trouve ainsi démontrée.

Or, comme pour tout $y \subset E_1$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} y = \Theta$ et il existe par conséquent un n naturel tel que $\left|\frac{1}{n} y\right| < \eta$, on peut trouver un x tel que $U(x) = \frac{1}{n} y$, donc que $U(nx) = y$. Mais il en résulte que $H = E_1$, conformément à la thèse du théorème.

Théorème 4. *Si l'opération linéaire $U(x)$ transforme E en E_1 tout entier, il existe pour toute suite de points $\{y_n\}$ de E_1 convergente vers $y_0 = U(x_0)$ une suite de points $\{x_n\}$ de E convergente vers x_0 et telle que $U(x_n) = y_n$, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$*

Démonstration. Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs tendant vers 0. L'opération $U(x)$ étant linéaire, on a la proposition (1), établie au cours de la démonstration du th. 3; il en résulte que l'image de la sphère ouverte $|x| < \varepsilon_n$ contient une sphère ouverte $|y| < \eta_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Considérons un m_0 naturel tel que, pour tout $m > m_0$, l'inégalité $|y_m - y_0| < \eta_n$ se présente au moins pour une valeur de n et soit, pour un m donné tel que $y_m \neq y_0$, n_m la plus grande de ces valeurs. Soit enfin x_m le point défini par les conventions:

a) *si $m \leqslant m_0$,* posons $x_m =$ un point arbitraire satisfaisant à l'équation $U(x_m) = y_m$,

b) *si $m > m_0$ et $y_m \neq y_0$,* posons $x_m =$ un point arbitraire de la sphère ouverte $|x - x_0| < \varepsilon_{n_m}$ satisfaisant à la même équation,

c) *si $m > m_0$ et $y_m = y_0$,* posons $x_m = x_0$.

La suite $\{x_n\}$ ainsi définie remplit — comme on vérifie facilement — la thèse du théorème.

Théorème 5. *Si l'opération linéaire transforme E en E_1 d'une façon biunivoque, cette transformation est en même temps bicontinue* [1].

La démonstration résulte immédiatement du th. 4.

Théorème 6. *Si un espace vectoriel E est un espace (F) aussi bien avec une définition de la distance (x, y) qu'avec une autre définition de la distance $(x, y)_1$ et si*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0 \text{ entraîne toujours } \lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0,$$

alors, réciproquement,

$$\lim (x_n, x)_1 = 0 \text{ entraîne toujours } \lim (x_n, x) = 0,$$

de sorte que la notion de limite est la même pour les deux métriques.

La démonstration s'obtient du th. 5, en désignant par E_1 l'espace E avec la métrique $(x, y)_1$ et l'opération linéaire $y = U(x)$ étant définie par la relation $y = x$.

Théorème 7. *Toute opération additive $y = U(x)$ qui remplit la condition*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0 \text{ entraînent } y_0 = U(x_0)$$

est une opération linéaire.

Démonstration. Introduisons dans E une nouvelle définition de la distance:

$$(x', x'')_1 = (x', x'') + (y', y''), \tag{4}$$

où $x' \subset E$, $x'' \subset E$, $y' = U(x')$, $y'' = U(x'')$, (x', x'') désigne la distance primitive de x' à x'' dans E et (y', y'') désigne la distance de y' à y'' dans E_1.

Il est facile de voir que, considéré avec la notion de distance $(x', x'')_1$, l'espace E est un espace du type (F); en particulier, pour vérifier qu'il est complet, soit $\{x_n\}$ une suite de points telle que

[1]) Pour le cas des espaces du type (B) (cf. Chap. V, § 1) ce théorème, de même que le th. 6 (qui en est un corollaire) se trouve dans ma note citée p. 27, mais la démonstration y est différente.

$\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_p, x_q)_1=0$; par conséquent, selon (4), $\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_p, x_q) = \lim\limits_{p,q\to\infty}(y_p, y_q) = 0$, de sorte qu'il existe un x_0 et un y_0 tels que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x_0) = = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n, y_0) = 0$, et, comme par l'hypothèse, $y_0 = U(x_0)$, on en tire en effet d'après (4), $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x_0)_1 = 0$.

Or, on a pour tout x' et x'', selon (4), $(x', x'')_1 \geqslant (x', x'')$; par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0$ entraîne $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x) = 0$; en vertu du th. 6, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x) = 0$ entraîne donc réciproquement $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x)_1 = 0$, donc aussi, d'après (4), $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$. Ainsi l'opération additive $U(x)$ est continue, c. q. f. d.

Lemme 1. *Soient $U'(x)$ et $U''(x)$ deux opérations linéaires définies respectivement dans les espaces E' et E'' du type (F) et dont les contredomaines sont situés dans l'espace E_1, également du type (F). Si l'équation $U'(x) = U''(y)$ admet pour tout x exactement une solution $y = U(x)$, l'opération $U(x)$ est linéaire.*

La démonstration résulte du th. 7, car, comme on aperçoit aussitôt, $\lim x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$ entraînent $y_0 = U(x_0)$.

Lemme 2. *Etant données: une opération additive $y = U(x)$ et une opération linéaire $z = V(y)$ telle que $V(y) = \Theta$ entraîne $y = \Theta$, si en outre l'opération $V[U(x)]$ est linéaire, l'opération $U(x)$ est aussi linéaire.*

La démonstration résulte du lemme 1, car l'équation $V[U(x)] = = V(y)$ admet pour tout x exactement une solution $y = U(x)$.

Définition. Une classe T d'opérations linéaires est dite *totale*, lorsque l'ensemble des égalités $V(x) = 0$ pour $V \subset T$ entraîne l'égalité $x = \Theta$.

Théorème 8. *Soient: $y = U(x)$ où $x \subset E$ et $y \subset E_1$ une opération additive et T une classe totale d'opérations linéaires définies dans E_1. Si $V[U(x)]$ est pour tout $V \subset T$ une opération linéaire, $U(x)$ est également une opération linéaire.*

Démonstration. Admettons que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ où $y_n = U(x_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Pour tout $V \subset T$ on a $\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = \lim_{n\to\infty} V(y_n) = V(y_0)$ et, l'opération $V[U(x)]$ étant linéaire, $\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = V[U(x_0)]$, d'où $V\ U(x_0)] - V(y_0) = 0$, donc $V[U(x_0) - y_0] = 0$ et, la classe T étant totale, $U(x_0) = y_0$. En vertu du th. 7 l'opération $U(x)$ est par conséquent linéaire.

Théorème 9. *$\{U_i(x)\}$ où $x \subset E'$ et $\{V_i(y)\}$ où $y \subset E''$ étant deux suites d'opérations linéaires à contredomaines situés dans un espace E_1 du type (F), si le système d'équations $U_i(x) = V_i(y)$ où $i = 1, 2, \ldots$ admet pour tout x exactement une solution $y = U(x)$, l'opération $y = U(x)$ est linéaire.*

Démonstration. Admettons en effet que l'on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et, pour la suite correspondante $\{y_n\}$, que $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. En raison de la continuité des opérations $\{U_i\}$ et $\{V_i\}$, on a alors $U_i(x_0) = V_i(y_0)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, d'où $y_0 = U(x_0)$, ce qui entraîne selon le th. 7 la continuité de l'opération $y = U(x)$.

§ 4. *Fonctions continues sans dérivée.*

A titre d'application, nous allons démontrer d'abord par une déduction facile du th. 4 du Chapitre I, p. 23, *l'existence d'une fonction continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive* [1]).

(C^1) désignant l'ensemble de toutes les fonctions continues périodiques de période 1, posons pour tout couple de fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de (C^1):

$$(x_1(t), x_2(t)) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Il est facile de voir que (C^1) constitue alors un espace du type (F).

[1]) S. Banach, *Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires*, Bull. des Sc. Math. L (1926), p. 27—32 et 36—43. La méthode appliquée a été développée ensuite par M. S. Saks et M. H. Steinhaus, qui l'ont employée pour traiter divers problèmes de la Théorie des fonctions (Cf. S. Saks, Fund. Math. X, p. 186—196 et H. Steinhaus, Stud. Math. I, p. 51—81).

Soit pour un nombre arbitraire $h \neq 0$

$$y(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

(S) désignant l'espace des fonctions mesurables (cf. 1, p. 9), qui est du type (F) (cf. § 1, p. 35), admettons que $y(t) \subset (S)$. L'expression (5) définit alors une opération linéaire à domaine (C^1) et à contredomaine contenu dans (S).

Soient lim $h_n = 0$ où $h_n \neq 0$ et

$$U_n(x) = \frac{x(t+h_n) - x(t)}{L} \quad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{6}$$

Or, *si toute fonction continue avait presque partout la dérivée*, la limite de l'expression (6) existerait pour presque toutes les valeurs de t. Il existerait par conséquent pour tout $x \subset (C^1)$ la limite $\lim\limits_{n \to \infty} U_n(x)$, qui serait définie dans le domaine (S), c. à d. une limite *en mesure*. En posant $U(x) = \lim\limits_{n \to \infty} U_n(x)$, on obtiendrait donc une opération additive $U(x)$ mesurable (B) qui, en vertu du th. 4, Chap. I, p. 35, serait une opération linéaire. $U(x)$ est évidemment la dérivée de la fonction $x(t)$.

Il résulte de la continuité de l'opération $U(x)$ que si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = 0$ *uniformément*, on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n'(t) = 0$ *en mesure*. Cependant pour $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin \frac{nt}{2\pi}$ on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = 0$ uniformément, tandis que la suite des dérivées $\left\{\frac{1}{2\pi} \cos n \frac{t}{2\pi}\right\}$ ne tend pas vers 0 en mesure. Il existe par conséquent des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive.

§ 5. *La continuité des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles.*

Soit $F(x) = 0$ une équation différentielle partielle linéaire p. ex. du second ordre:

$$(7) \quad F(x) = a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + a_3 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a_4 \frac{\partial x}{\partial u} + a_5 \frac{\partial x}{\partial v} + a_6 x = 0,$$

où a_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ sont des fonctions continues des variables u et v dans une région fermée $\overline{G}$ ayant pour frontière une courbe simple fermée C.

Il peut arriver que, pour des conditions aux limites d'une certaine nature, l'équation (7) *admette toujours une seule solution* $x(u, v)$ qui est continue dans $\overline{G}$ avec ses dérivées partielles qui figurent dans (7), c. à. d. du premier et second dégré dans l'intérieur G de $\overline{G}$.

Dans cette hypothèse, les conditions aux limites peuvent être d'ailleurs bien diverses. Elles peuvent consister p. ex. à donner les valeurs de la fonction sur la courbe C (type elliptique) ou sur une partie de cette courbe (type hyperbolique, parabolique) ou les valeurs de la dérivée sur les normales à la courbe C etc.

Supposons encore que, t désignant le paramètre qui parcourt C, l'équation (7) admette pour toute fonction $\xi(t)$ continue avec ses dérivées p. ex. jusqu'à l'ordre r une solution $x(u, v)$ se réduisant sur C à la fonction $\xi(t)$.

Ceci posé, nous allons démontrer que

Si la suite $\{\xi_n(t)\}$ *remplit les conditions* (imposées à $\xi(t)$) *et si l'on a uniformément* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(t) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^{(i)}(t) = 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, r$, *alors,* $\{x_n(u, v)\}$ *désignant la suite des solutions correspondantes de l'équation* $F(x) = 0$, *on a uniformément dans* $\overline{G}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ *et uniformément dans toute région fermée située dans* G: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0, \ldots$ *etc.* (pour toutes les dérivées partielles qui figurent dans l'équation (7)).

Pour la démonstration, désignons par E l'ensemble de toutes les fonctions $x(u, v)$ satisfaisant à (7), continues dans $\overline{G}$ et ayant les dérivées partielles des deux premiers ordres (celles qui figu-

rent dans (7)) continues dans G. Soit $\{\bar{G}_n\}$ une suite de régions fermées situées dans G et telles que $G = \sum_{k=1}^{\infty} G_k$. Posons pour tout couple $x(u, v) \subset E$ et $y(u, v) \subset E$:

$$(x, y) = \max_{u, v \subset \bar{G}} |x(u, v) - y(u, v)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{u, v \subset \bar{G}_k} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \dots}{1 + \max\limits_{u, v \subset \bar{G}_k} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \dots}$$

en y faisant entrer les différences de toutes les dérivées partielles qui figurent dans l'équation (7).

Ainsi métrisé, E constitue un espace du type (F) et la relation $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ (suivant la distance définie de la sorte) signifie que x_n tend uniformément vers x dans $\bar{G}$ en même temps que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2}, \dots$ (figurant dans (7)) tendent uniformément vers les dérivées partielles correspondantes de la fonction x dans toute région fermée $\bar{G}_k$ où $k = 1, 2, \dots$

Soit E_1 l'ensemble des fonctions $\xi(t)$, où t parcourt C, continues avec leurs r premières dérivées. Posons pour tout couple $\xi(t) \subset E_1$ et $\eta(t) \subset E_1$:

$$(\xi, \eta) = \max_{t \subset C} |\xi(t) - \eta(t)| + \sum_{i=1}^{r} \max_{t \subset C} |\xi^{(i)}(t) - \eta^{(i)}(t)|.$$

Désignons maintenant par $\xi = U(x)$ l'opération qui fait correspondre à toute fonction $x = x(u, v) \subset E$ la fonction $\xi = \xi(t)$ à laquelle $x(u, v)$ se réduit sur la frontière C de G. Ainsi définie, l'opération $U(x)$ est manifestement additive et continue.

Or, le contredomaine de l'opération $U(x)$ étant un espace du type (F), l'opération inverse $x = U^{-1}(\xi)$, qui existe par l'hypothèse, est en vertu du th. 5, p. 41, continue, ce qui implique la proposition à démontrer.

Remarque. Si nous faisions tomber l'hypothèse de l'univocité de la solution de l'équation (7), nous serions restreints à ne conclure (en vertu du th. 4, p. 40) que ceci: $\{\xi_n(t)\}$ ayant la signification

précédente, *il existe* une suite de fonctions $\{x_n(u, v)\}$ satisfaisant à (7), se réduisant sur C à $\xi_n(t)$ et telles qu'on a $\lim_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ uniformément dans $\bar{G}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0, \ldots$ uniformément dans toute région fermée contenue dans G.

§ 6. *Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.*

Soient (a_{ik}) où $i = 1, 2, \ldots$ et $k = 1, 2, \ldots$ un tableau (suite double) arbitraire de nombres réels et E_1 un espace du type (F) dont les éléments sont des suites de nombres.

Théorème 10. *Si pour toute suite $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ le système d'équations*

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k = \eta_i \quad \textit{où} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

admet toujours une seule solution $\{\xi_k\}$, il existe des fonctionnelles linéaires $\xi_k = f_k(y)$ où $k = 1, 2, \ldots$, définies dans E_1 et telles que l'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k(y) = \eta_i \quad \textit{pour tout} \quad y \subset E_1 \ \textit{et} \ i = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. Désignons par E l'ensemble de toutes les suites $x = \{\xi_k\}$ qui remplissent les conditions

a) *la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k$ *est convergente pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

b) *la suite* $\{\eta_i\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k\right\}$ *appartient à* E_1.

Posons pour tout couple $x' = \{\xi_k'\}$ et $x'' = \{\xi_k''\}$ d'éléments de E:

$$(x', x'')_i = \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\xi'_k - \xi''_k) \right|,$$

$$(x', x'')_0 = \textit{distance des suites} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi'_k\right\} \text{ et } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi''_k\right\} \textit{ dans } E_1$$

et définissons la distance (x', x'') dans E par la formule

$$(x', x'') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{(x', x'')_i}{1 + (x', x'')_i}$$

Remarquons que

(9) *Pour tout* $k = 1, 2, \ldots$ *si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ *où* $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \subset E$, *on a* $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$.

En effet, par suite de l'univocité des solutions du système d'équations (8) la k-ième colonne contient au moins un terme $a_{ik} \neq 0$. Admettons donc que

$$a_{i_k k} \neq 0 \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, on a $\lim_{n\to\infty} (x_n, \Theta)_{i_1} = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = 0$, car (10) donne $a_{i_1 1} \neq 0$, et il est facile à présent de prouver par induction que l'on a d'une façon générale $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$ pour tout k naturel.

Ainsi établie, la proposition (9) permet de montrer que E est un espace vectoriel complet.

Admettons à ce but que la suite $\{x_n\}$ où $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$ remplit la condition $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (x_p, x_q) = 0$. Par conséquent $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (x_p - x_q) = 0$, d'où en vertu de (9), $\lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (\xi_k^{(p)} - \xi_k^{(q)}) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, de sorte qu'il existe un $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$ pour tout k naturel. Soit $x = \{\xi_k\}$. On vérifie aisément que $x \subset E$ et que $\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_i = 0$ pour tout $i = 0, 1, \ldots$, d'où $\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$; l'espace E est donc, en effet, complet.

Il en résulte que E est un espace du type (F).

Ceci établi, posons

$$y = U(x)$$

pour toutes deux suites $x = \{\xi_k\} \subset E$ et $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ qui satisfont au système d'équations (8).

On voit aussitôt que

$$(y, \Theta) = (x, \Theta)_0 \leqslant (x, \Theta), \tag{11}$$

où (y, Θ) désigne, bien entendu, la distance dans E_1 et (x, Θ) celle dans E.

En vertu de (11), $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ entraîne $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. L'opération $y = U(x)$ est donc linéaire et comme elle transforme E en E_1 d'une façon univoque, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est d'après le th. 5, p. 40, également linéaire. Par conséquent, si l'on pose pour $k = 1, 2, \ldots$: $\xi_k = f_k(y)$ où $x = U^{-1}(y) = \{\xi_k\}$, on voit que $\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$, où $x_n = U^{-1}(y_n) = \{\xi_k^{(n)}\}$; entraîne $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, donc $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$; ainsi les fonctionnelles additives $f_k(y)$ sont des fonctionnelles linéaires dans E_1, c. q. f. d.

Ce théorème implique, comme nous allons voir, le théorème suivant [1]):

Si le système d'équations (8) *admet exactement une solution pour toute suite* $\{\eta_i\}$ *appartenant*

1⁰ *à l'espace des suites convergentes vers* 0,

2⁰ *à l'espace (s),*

3⁰ *à l'espace (l),*

4⁰ *à l'espace* $(l^{(p)})$ où $p > 1$,

il existe un tableau $\{b_{ki}\}$ *tel que*

$$\xi_k = \sum_{i=1} b_{ki}\,\eta_i \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où les suites $\{\xi_k\}$ *et* $\{\eta_i\}$ *satisfont au système d'équations* (8) *et qui remplit respectivement les conditions:*

1⁰ $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}| < \infty$ *pour* $k = 1, 2, \ldots,$

2⁰ *il n'a que des lignes finies* (c. à. d. qu'il existe une suite numérique n_k telle que l'on a $b_{ki} = 0$ pour tout $i > n_k$),

3⁰ $|b_{ki}| < m_k$ *pour une suite de nombres* $\{m_k\}$,

4⁰ $\sum_{i=1} |b_{ki}|^{\frac{p}{p-1}} < \infty$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$

[1]) dont le cas 4⁰ a été connu (cf. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913).

Remarque. Si l'on suppose que le système d'équations (8) admet exactement une solution *pour toute suite convergente* $\{\eta_i\}$ (pas nécessairement convergente vers 0), il existe, en dehors du tableau $\{b_{ki}\}$ assujetti à 1°, une suite bornée $\{c_k\}$ telle que

$$\xi_k = c_k \lim_{i\to\infty} \eta_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\eta_i \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tous ces théorèmes s'obtiennent du th. général établi au début (th. 10, p. 47) par une représentation convenable de la fonctionnelle linéaire dans chaque espace particulier (voir théorèmes p. 50, et 66—68).

§ 7. *Applications de l'espace (s).*

Nous allons établir la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (s) des suites de nombres (voir Introduction § 7, 2, p. 10).

Théorème 11. *Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace (s) est de la forme*

$$(12) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \xi_i,$$

où N est un nombre naturel dépendant de f.

Démonstration. Soit $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ où $\xi_i^{(n)} = 0$ pour $i \neq n$ et $\xi_n^{(n)} = 1$. Posons $f(x_n) = a_n$. Pour toute suite $x = \{\xi_n\}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, d'où $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$. Or, cette série étant convergente pour toute suite $\{\xi_n\}$, il existe un N naturel tel que l'on a $a_n = 0$ pour tout $n > N$, d'où la forme (12) de $f(x)$.

M. O. Toeplitz[1]) a établi le théorème suivant:

[1]) O. Toeplitz, *Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten,* Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo XXVIII (1909), p. 88—96.

Théorème 12. *Pour qu'il existe une suite de nombres* $\{\xi_k\}$ *satisfaisant au système d'équations* (8), *il faut et il suffit que, pour toute suite finie de nombres* $h_1, h_2, \ldots, h_r$, *la condition* $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = 0$ *où* $k = 1, 2, \ldots$ *entraîne l'égalité* $\sum_{i=1}^{r} h_i \eta_i = 0$.

En particulier, si la condition $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = 0$ *où* $k = 1, 2, \ldots$ *entraîne* $h_1 = h_2 = \ldots = h_r = 0$, *le système d'équations* (8) *admet une solution pour toute suite* $\{\eta_i\}$.

Nous allons démontrer le

Théorème 13. *Si le système d'équations* (8) *admet pour toute suite* $y = \{\eta_i\}$ *exactement une solution, il existe pour tout* i *naturel un* N_i *naturel tel qu'on a* $a_{ik} = 0$ *pour tout* $k > N_i$.

Démonstration. Posons $\xi_k = f_k(y)$ pour $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i$ où $i = 1, 2, \ldots$ En vertu du th. 10, p. 47, $f_k(y)$ est une fonctionnelle linéaire définie dans l'espace (*s*) des suites de nombres réels, (cf. p. 10). Il existe donc pour tout k naturel une suite finie de nombres $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{N_k k}$ telle que

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_{ik} \eta_i = \xi_k. \tag{13}$$

Or, *les équations du système* (8) *sont linéairement indépendantes.*

En effet, supposons par contre qu'il existe une suite finie de nombres $h_1, h_2, \ldots, h_r$ telle que $\sum_{k=1}^{r} h_k a_{ik} = 0$ où $i = 1, 2, \ldots$ On aurait donc selon (13).

$$\sum_{k=1}^{r} h_k \xi_k = \sum^{r} h_k f_k(y) = 0 \quad \textit{pour toute suite} \quad y = \{\eta_i\}. \tag{14}$$

En posant $\eta_i^0 = a_{ij}$ pour un $j \leqslant r$ naturel arbitrairement fixé, on constate aussitôt que l'on a pour la solution correspondante $\{\xi_k^0\}$ du système d'équations (8): $\xi_j^0 = 1$ et $\xi_k^0 = 0$ pour tout $k \neq j$. Ces valeurs mises dans (14) donnent $h_j = 0$; en conséquence, tous

les coefficients h_k s'annulent, ce qui prouve l'indépendance linéaire des équations (8).

Il en résulte en vertu du th. 12 l'existence pour toute suite $\{\xi_k\}$ d'une suite de nombres $\{\eta_i\}$ satisfaisant aux équations (13). La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ est par conséquent convergente pour toute suite $\{\xi_k\}$ d'où l'existence pour tout $i = 1, 2, \ldots$ d'un N_i conforme à la thèse du théorème.

Remarque. En faisant tomber l'hypothèse d'après laquelle il n'existe qu'une seule solution, le théorème cesse d'être vrai.

En effet, $\{\eta_j\}$ étant une suite arbitraire, il existe une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k$ à coefficients réels ξ_k telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = \eta_j \quad \textit{où} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Or, ce système d'équations admet donc une solution pour toute suite $\{\eta_i\}$; évidemment cette solution n'est pas unique, car il existe une série entière distincte de 0 et telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = 0 \quad \textit{où} \quad j = 1, 2, \ldots$$

CHAPITRE IV.

Espaces normés.

§ 1. *Définitions des espaces vectoriels normés et des espaces du type (B).*

Un espace vectoriel E est dit *normé* s'il existe une fonctionnelle — qui est appelée *norme* et désignée par $|x|$ ou $\|x\|$ — assujettie aux conditions:

1) $|\Theta| = 0$ *et* $|x| > 0$ *pour* $x \neq \Theta$,

2) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

3) $|tx| = |t| \cdot |x|$ *pour tout nombre* t.

Si on définit la distance de deux éléments x et y de E par la formule

$$(x, y) = |x - y|,$$

on obtient évidemment un espace métrique. S'il est, de plus, complet (voir p. 9; c. à d. dans le cas considéré que $\lim\limits_{q \to \infty p \to \infty} |x_p - x_q| = 0$ entraîne l'existence d'un $x \subset E$ tel que $\lim\limits_{n \to \infty} |x_p - x| = 0$), il s'appelle *espace du type (B)* [1]).

On voit aussitôt que tout espace du type (B) est en même temps du type (F), mais non réciproquement: les exemples d'es-

[1]) La classe des espaces du type (B) a été traitée d'une façon générale pour la première fois dans mon ouvrage précité de Fund. Math. III (1922), p. 133—181.

paces décrits dans l'Introduction, p. 9—12, et qui sont tous du type (F), ne sont du type (B) qu'à l'exception des espaces (s) et (S).

§ 2. *Propriétés des opérations linéaires. Extension des fonctionnelles linéaires.*

Nous allons nous occuper d'abord des espaces E *normés*, mais pas nécessairement complets.

Théorème 1. *Pour qu'une opération additive $U(x)$ définie dans un espace vectoriel $G \subset E$ soit linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre M tel qu'on ait:*

$$(1) \qquad |U(x)| \leqslant M \cdot |x| \quad \textit{pour tout} \quad x \subset G.$$

Démonstration [1]). La condition est nécessaire. En effet, à défaut d'un pareil M, il existerait une suite $\{x_n\}$ telle que $|U(x_n)| > M_n |x_n|$ où $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$. En posant $Y_n = \dfrac{1}{M_n |x_n|} \cdot x_n$, on aurait donc $|Y_n| = \dfrac{1}{M_n}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \Theta$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} U(Y_n) = \Theta$, ce qui est impossible, car $|U(Y_n)| = \dfrac{1}{M_n |x_n|} |U(x_n)| > 1$.

La condition est suffisante. En effet, pour tous x_n et x de G, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ entraîne $\lim\limits_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} |U(x_n) - U(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |U(x - x_n)| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} M \cdot |x - x_n| = 0$ et enfin $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$, c. q. f. d.

Etant donnée une opération linéaire $U(x)$ définie dans un espace vectoriel $G \subset E$, on appelle *norme* de l'opération $U(x)$ dans G et on désigne par $|U|_G$ le plus petit nombre M satisfaisant à la condition (1). Si $G = E$, on peut l'écrire tout court $|U|$ au lieu de $|U|_E$.

[1]) Cf. S. Banach, l. c., Fund. Math. III, p. 151—153.

On a donc $|U(x)| \leqslant |U|_G \cdot |x|$ *pour* $x \subset G$ et il est facile de voir que

$$|U|_G = \underset{x \subset G, |x| \leqslant 1}{\text{borne sup}} |U(x)|.$$

La question s'impose s'il existe pour tout espace vectoriel normé une fonctionnellè linéaire (définie dans cet espace) qui n'est pas identiquement nulle. La réponse affirmative résulte des théorèmes suivants[1]) dont le premier est une conséquence facile du th. 1 (Chap. II, § 2), p. 27.

Théorème 2. *Etant donnée une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans un espace vectoriel $G \subset E$, il existe une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et satisfaisant aux conditions:*

$$F(x) = f(x) \quad \textit{pour} \quad x \subset G \quad \textit{et} \quad |F| = |f|_G.$$

Pour la démonstration, il suffit de poser $p(x) = |x| \cdot |f|_G$ dans le th. 1 du Chap. II.

Théorème 3. *Pour tout $x_0 \subset E$ il existe une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et telle que*

$$F(x_0) = |x_0| \quad \textit{et} \quad |F| = 1.$$

Pour la démonstration, il suffit de désigner dans le th. 2, qui précède, par G l'ensemble des éléments de la forme hx_0 où h est un nombre arbitraire et de poser $F(hx_0) = h \cdot |x_0|$.

Il en résulte, en particulier, *l'existence dans tout espace vectoriel normé d'une fonctionnelle linéaire n'étant pas identiquement nulle.*

Théorème 4. *Soit $f(x)$ une fonctionnelle quelconque définie dans un ensemble $G \subset E$. Pour qu'il existe une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et satisfaisant aux conditions*

1^0 *$f(x) = F(x)$ pour $x \subset G$,*

[1]) Les théorèmes 2—6 se trouvent dans la note de M. H. Hahn, *Über lineare Gleichungen in linearen Räumen,* Journ. für reine u. angew. Math. 157 (1927), p. 214—229; cf. aussi S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires,* Stud. Math. I (1929), p 211—216, en particulier th. 2 et remarque.

2° $|F| \leqslant M$ *pour un nombre donné* $M > 0$,
il faut et il suffit que l'on ait l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) \leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$$

pour toute suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *d'éléments de* G *et pour toute suite finie* $h_1, h_2, \ldots, h_r$ *de nombres réels* [1].

Démonstration. La condition est nécessaire. On a en effet $\left|F\left(\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right)\right| \leqslant |F| \cdot \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$, d'où selon 2° $\sum_{i=1}^{r} h_i F(x_i) \leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$ et comme on a selon 1° $F(x_i) = f(x_i)$ pour tout $x_i \subset G$, il en résulte l'inégalité à démontrer.

La condition est suffisante. Soit, en effet, H l'espace vectoriel des éléments de la forme $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$ où r designe un nombre naturel, h_i des nombres quelconques et $x_i \subset G$. Posons $\varphi(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i)$.

Pour $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{s} h'_i x'_i$ on a par hypothèse $\left|\sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{s} h'_i f(x'_i)\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i - \sum_{i=1}^{s} h'_i x'_i\right| = 0.$

La fonctionnelle $\varphi(z)$ est donc définie dans H d'une facon univoque et, comme on voit facilement, elle y est additive. En outre, $|\varphi(z)| = \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right|$ donne $|\varphi|_H \leqslant M$. L'existence dans E de la fonctionnelle $F(x)$ à propriétés 1° et 2° s'obtient donc du th. 2, p. 55, par substitution de φ ă f et de H à G.

En particulier, si G est une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E et C_n désignent les valeurs correspondantes de la fonctionnelle $f(x)$, on a le

[1] Ce théorème a été établi pour certains espaces spéciaux par F: Riesz *(Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen,* Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497) et, dans une forme plus générale, par E. Helly *(Über lineare Funktionaloperationen,* Wiener Berichte 121 (1912), p. 265—297).

Théorème 5. *Pour qu'il existe dans E une fonctionnelle linéaire $F(x)$ assujettie aux conditions*

1° $F(x_n) = C_n$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$ *et* 2° $|F| \leqslant M$

pour un nombre donné $M > 0$, une suite donnée $\{x_n\}$ d'éléments de E et une suite donnée $\{C_n\}$ de nombres réels, il faut et il suffit que l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i C_i\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right|$$

se présente pour toute suite finie $h_1, h_2, \ldots, h_r$ de nombres réels.

§ 3. *Ensembles fondamentaux et ensembles totaux d'éléments.*

Nous allons établir à présent quelques théorèmes qui jouent dans la théorie des espaces normés un rôle analogue à celui que le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes joue dans la théorie des fonctions de variable réelle.

Lemme. *Etant donné un espace vectoriel $G \subset E$ et un élément y_0 de E situé à la distance $d > 0$ de G, il existe une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et satisfaisant aux conditions:*

1) $F(y_0) = 1$,
2) $F(x) = 0$ *pour* $x \subset G$,
3) $|F \quad \frac{1}{d}$.

Démonstration. Soit H l'ensemble des x de la forme

(2) $x = x' + \alpha y_0$ *où α est un nombre arbitraire et $x' \subset G$.*

Ainsi défini, H est évidemment un ensemble linéaire et comme $d > 0$, la représentation (2) de x est univoque. Nous définissons dans H la fonctionnelle additive $f(x)$, en posant $f(x) = \alpha$ pour x de la forme (2). Comme $|x| = |x' + \alpha y_0| = |\alpha| \cdot \left|\frac{1}{\alpha} x + y_0\right| \geqslant$ $\geqslant |\alpha| \cdot d$, il vient d'une part $|f(x)| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{d}|x|$, d'où $|f|_H \leqslant \frac{1}{d}$.

D'autre part $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_0|=d$ pour $x_n \subset G$ entraîne $|f(x_n-y_0)|=1 \leqslant$ $\leqslant |x_n-y_0|\cdot|f|_H$, d'où $1\leqslant d\cdot|f|_H$, donc $\frac{1}{d}\leqslant|f|_H$. On a par conséquent $|f|_H=\frac{1}{d}$.

On en conclut en vertu du th. 2, p. 55, (en y remplaçant G par H) qu'il existe une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et telle que $F(x)=f(x)$ pour $x\subset H$ et $|F|=|f|_H=\frac{1}{d}$ (condition 3), donc, en particulier, $F(x)=0$ pour $x\subset G$ (condition 2) et $F(y_0)=1$ (condition 1), c. q. f. d.

Théorème 6. *Etant donnés un ensemble quelconque $G\subset E$ et un élément arbitraire y_0 de E, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite $\{g_n\}$ de combinaisons linéaires*[1] *d'éléments de G telle que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n=y_0$, est que $f(x)=0$ pour $x\subset G$ entraîne $f(y_0)=0$, quelle que soit la fonctionnelle linéaire $f(x)$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, l'égalité $f(x)=0$ pour tous les $x\subset G$ entraîne l'égalité $f(g_n)=0$ pour $n=1,2,\ldots$, d'où $f(\lim\limits_{n\to\infty} g_n)=f(y_0)=0$.

La condition est suffisante en vertu du lemme qui précède, en y désignant par G l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de l'ensemble G considéré ici, c. q. f. d.

Un ensemble $G\subset E$ s'appelle *fondamental,* lorsque l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de G est dense dans E; il s'appelle *total,* lorsque toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ qui s'annule pour chaque $x\subset G$, s'annule aussi pour chaque $x\subset E$.

On déduit aisément du th. 6 le suivant

Théorème 7. *Pour qu'un ensemble $G\subset E$ soit fondamental, il faut et il suffit qu'il soit total.*

[1]) voir la définition de cette notion Chap. II, § 1, p. 27.

Une fonctionnelle linéaire $f(x)$ est dite *orthogonale à un élément* x_0, lorsque $f(x_0) = 0$; elle est dite *orthogonale à* G, lorsque cette égalité se présente pour tout $x \subset G$.

Le lemme p. 57 implique *pour tout sous-ensemble* $G \neq E$ *linéaire et fermé l'existence dans l'espace* E *d'une fonctionnelle linéaire non identiquement nulle et orthogonale à* G.

§ 4. *Forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces* (C), $(L^{(r)})$, (c), $(l^{(r)})$, (m) *et dans les sous-espaces de* (m).

Nous allons établir à présent la forme générale des fonctionnelles linéaires dans certains espaces normés particuliers [1]).

1. *Espace* (C). La norme définie dans l'espace (M) [2]) coïncidant pour les fonctions continues avec celle de l'espace (C), on peut considérer (C) comme un espace vectoriel situé dans (M).

Etant donnée une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans (C), il existe en vertu du th. 2, p. 55, une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans (M) et satisfaisant aux conditions:

$$F(x) = f(x) \quad pour\ tout \quad x \subset (C), \tag{1}$$

$$\| F \|_{(M)} = \| f \|_{(C)}. \tag{2}$$

Posons:

$$= \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & pour \quad 0 \leqslant u \leqslant t \\ 0 & pour \quad t < u \leqslant 1 \end{cases}$$

et

$$F(\xi_t) = g(t). \tag{3}$$

Nous allons montrer que $g(t)$ est une fonction à variation bornée. Soient $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ et $\varepsilon_i = \text{sign}\,[g(t_i) - g(t_{i-1})]$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On a $\sum_{i=1}^{n} | g(t_i) - g(t_{i-1}) | = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i) = -g(t_{i-1})\}\varepsilon_i =$ $= F\left[\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}\, \varepsilon_i\right] \leqslant \| F \|_{(M)} \cdot \overset{\cdot\cdot}{\sum_{i-1}} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}\, \varepsilon_i$ et on aperçoit

[1]) cf. Introduction, § 7, p. 11—12, exemples 4, 5, 6, 8 et 9.

[2]) voir 3, p. 10.

aisément que la norme de cette somme est $= 1$. Il en résulte d'après (2) que

$$\text{(4)} \qquad \underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{variation}}\, g(t) \leqslant |F|_{(M)} = |f|_{(C)}.$$

Ceci établi, soient $x(t) \subset (C)$ et

$$\text{(5)} \qquad z_n = z_n(u) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left\{\xi_{\frac{r}{n}}(u) - \xi_{\frac{r-1}{n}}(u)\right\}.$$

La fonction $z_n(u)$ prend donc respectivement dans les intervalles $\frac{r-1}{n} < u \leqslant \frac{r}{n}$ les valeurs $x\left(\frac{r}{n}\right)$. La fonction $x = x(u)$ étant continue, on a $\lim_{n\to\infty} \|x - z_n\| = 0$, d'où selon (1):

$$\text{(6)} \qquad \lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(x) = f(x).$$

D'autre part, les égalités (3) et (5) donnent

$$F(z_n) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left[g\left(\frac{r}{n}\right) - g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right],$$

donc, comme $x(t) \subset (C)$ et $g(t)$ est une fonction à variation bornée, $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \int_0^1 x(t)\, dg$, d'où en vertu de (6):

$$\text{(7)} \qquad f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg \quad \textit{pour tout} \quad x(t) \subset (C).$$

Comme par conséquent $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\, dg\right| \leqslant \underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{variation}}\, g(t) \cdot \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$, on a selon (4), en posant $|f| = |f|_{(C)}$:

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{variation}}\, g(t) = |f|.$$

Nous avons ainsi obtenu le théorème [1]):

[1]) qui a été démontré pour la première fois par F. Riesz *(Sur les opérations fonctionnelles linéaires,* Comptes-Rendus de l'Acad. des Sc. 149 (1909), p. 974—977).

Toute fonctionnelle linéaire définie dans l'espace (C) est de la forme

$$f(x) = \int^{1} x(t)\, dg,$$

où $g(t)$ est une fonction indépendante de $x(t)$ à variation $|f|$.

Réciproquement, étant donnée une fonction $g(t)$ à variation bornée, la fonctionnelle $f(x)$ définie par (7) est évidemment linéaire.

2. *Espace* $(L^{(r)})$ *où* $r \geqslant 1$. Etant donnée une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace $(L^{(r)})$, posons:

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & pour \quad 0 \leqslant u \leqslant t \\ 0 & pour \quad t < u \leqslant 1 \end{cases}$$

et

$$f(\xi_t) = g(t).$$

Nous allons montrer que $g(t)$ est une fonction absolument continue.

En effet, soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ des intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre à extrémités respectives t_i et t'_i où $t_i < t'_i$ et $i = 1, 2, \ldots, n$. En posant $\varepsilon_i = \text{sign}\,[g(t'_i) - g(t_i)]$, on a

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |g(t'_i) - g(t_i)| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t'_i) - g(t_i)\}\, \varepsilon_i = \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t'_i} - \xi_{t_i}\}\, \varepsilon_i\right) \leqslant |f| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t'_i} - \xi_{t_i}\}\, \varepsilon_i \right\| \end{aligned}$$

La fonction $(\xi_{t'_i} - \xi_{t_i})\, \varepsilon_i$ prenant dans l'intervalle δ_i la valeur $\varepsilon_i = \pm 1$ et s'annulant ailleurs, il vient en vertu de l'hypothèse que les intervalles δ_i n'empiètent pas l'un sur l'autre

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_{t'_i} - \xi_{t_i})\, \varepsilon_i \right\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|},$$

où $|\delta_i|$ désigne la longueur de δ_i. On a donc, d'après (8),

$\sum_{i=1}^{n} | g(t'_i) - g(t_i) | \leqslant |f| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|}$, ce qui prouve la continuité absolue de $g(t)$.

Ceci établi, posons $g'(t) = \alpha(t)$. La fonction $\alpha(t)$ est intégrable et, comme $\xi_0 = 0$, on a évidemment $f(\xi_t) = \int_0^t \alpha(t)\,dt$, d'où

$$(9) \qquad f(\xi_t) = \int_0^1 \xi_t(u)\,\alpha(u)\,du.$$

Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ des nombres arbitraires, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et $x(t) = c_i$ pour $t_{i-1} \leqslant t < t_i$ et $i = 1, 2, \dots, n$. On a évidemment $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, (\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}})$, d'où selon (9)

$$(10) \qquad f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt.$$

Ainsi l'égalité (10) est remplie pour toute fonction „en escalier“ $\alpha(t)$.

Si $x = x(t)$ est à présent une fonction quelconque mesurable et bornée, il existe une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions „en escalier“ bornées dans leur ensemble et tendant presque partout vers $x(t)$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^r\,dt = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$ et, selon (10), $f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$. Ainsi l'égalité (10) est remplie pour toute fonction $x(t)$ mesurable et bornée.

Ceci établi, considérons d'abord le cas où $r > 1$.

Posons:

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1} \cdot \operatorname{sign} \alpha(t) & \textit{pour} \quad |\alpha(t)|^{s-1} \leqslant n \\ n \cdot \operatorname{sign} \alpha(t) & \textit{pour} \quad |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

où $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. On a $|f(x_n)| = \left| \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt \right| \leqslant |f| \cdot \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r\,dt}$

et comme $x_n(t)\,\alpha(t) = |x_n(t)| \cdot |\alpha(t)| \geqslant |x_n(t)| \cdot |x_n(t)|^{\frac{1}{s-1}}$, on a $\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{s}{s-1}} dt \leqslant |f| \cdot \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt}$, d'où, en tenant compte que $\frac{s}{s-1} = r$, on tire $\left(\int_0^1 |x_n(t)|^r dt\right)^{1-\frac{1}{r}} \leqslant |f|$. Comme cette inégalité subsiste pour tout n naturel et comme $|x_n(t)|^r \leqslant |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$ et presque partout $\lim |x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$, on obtient

$$\sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt} \leqslant |f|, \tag{11}$$

de sorte que $\alpha(t)$ est une fonction à s-ième puissance sommable. Par conséquent, si $x(t)$ est une fonction mesurable arbitraire à r-ième puissance sommable, le produit $x(t)\,\alpha(t)$ est évidemment une fonction intégrable.

Définissons à présent la suite $\{x_n(t)\}$ comme il suit:

$$x_n = x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \textit{pour} \quad |x(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} x(t) & \textit{pour} \quad |x(t)| > n. \end{cases} \tag{12}$$

On a alors

$$\|x - x_n\| = \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r dt} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0, \tag{13}$$

de sorte que $\left|\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt - f(x_n)\right| = \left|\int_0^1 [x(t) - x_n(t)]\,\alpha(t)\,dt\right| \leqslant$ $\leqslant \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r dt} \cdot \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt}$, d'où, selon (13), $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ et comme $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\right| \leqslant$ $\leqslant \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt} \cdot \|x\|$, la formule (11) donne l'égalité

$$|f| = \sqrt{\int_0^1 \alpha(t)|^s\, dt}\,.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème [1]):

Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace $(L^{(r)})$ où $r > 1$ est de la forme

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

où

$$\alpha(t) \subset (L^{(s)}) \quad et \quad |f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt}\,.$$

Passons maintenant au cas où $r = 1$. Soient $0 \leqslant u < u + h \leqslant 1$ et

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & pour \quad u \leqslant t \leqslant u + h \\ 0 & pour \quad 0 \leqslant t < u \quad et \quad u + h < t \leqslant 1\,. \end{cases}$$

On a, selon (10), $|f(x)| = \left|\int x(t)\, \alpha(t)\, dt\right| = \frac{1}{h}\left|\int^{u+h} \alpha(t)\, dt\right|$ et comme $|f(x)| \leqslant |f| \cdot \|x\| = |f| \cdot 1$, il vient $\left|\int_u^{u+h} \alpha(t)\, dt\right| \leqslant |f| \cdot h$. La fonction $g(u) = \int_0^u \alpha(t)\, dt$ satisfait donc à la condition de Lipschitz et comme on a presque partout $g'(t) = \alpha(t)$, on en conclut que

(14) $$|\alpha(t)| \leqslant |f| \quad presque\ partout.$$

Si à présent $x = x(t)$ est une fonction intégrable quelconque et la suite $\{x_n(t)\}$ est définie par les formules (12), on a $\| x - x_n \| = \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|\, dt \to 0$, d'où $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt =$

[1]) Pour $r = 2$ ce théorème a été établi par M. Fréchet (*Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. 144 (1907), p. 1414—1416) et dans le cas général par F. Riesz, l. c., Math. Ann 69 (1910), p. 449—497, v. p. 475.

$= \int\limits_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$, puisque $|x_n(t)\,\alpha(t)| \leqslant |x(t)\,\alpha(t)|$. Or, comme $\left|\int\limits_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt \cdot \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{vrai max}}\,|\alpha(t)|$, on obtient en vertu de (14) l'égalité

$$|f| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{vrai max}}\,|\alpha(t)|.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème[1]):

Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace (L) est de la forme

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction bornée presque partout et $|f| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{vrai max}}\,|x(t)|$.

3. *Espace (c).* Soient

$$\xi_i^n = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = i \\ 0 & \text{pour } n \neq i, \end{cases} \tag{15}$$

$$x_n = \{\xi_i^n\} \quad \text{et} \quad x' = \{\xi_i^i\}.$$

Etant donnée une fonctionnelle linéaire $f(x)$ où $x = \{\xi_n\} \subset (c)$, posons

$$f(x_n) = C_n \quad et \quad f(x') = C', \tag{16}$$

En posant $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, on a donc $\left\| x - \alpha x' - \sum\limits_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha)\,x_n \right\| = \underset{n>r}{\text{borne sup}}\,|\xi_n - \alpha|$, d'où $x = \alpha x' + \lim\limits_{r\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha)\,x_n$ et par conséquent $x = \alpha x' + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha)\,x_n$. Donc $f(x) = \alpha \cdot f(x') + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot f(x_n)$, d'où selon (16)

$$f(x) = \alpha\, C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot C_n. \tag{17}$$

[1]) Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. H. Steinhaus (*Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeitschr. 5 (1918), p. 186—221).

Si $x = \{\xi_n\}$ est à présent la suite où

$$\xi_n = \begin{cases} \text{sign } C_n & \textit{pour} \quad n \leqslant r, \\ 0 & \textit{pour} \quad n > r, \end{cases}$$

on a $\|x\| = 1$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{r} |C_n|$, et comme $|f(x)| \leqslant |f| \cdot \|x\|$, il vient $\sum\limits_{n=1}^{r} |C_n| \leqslant |f|$. Le nombre r étant arbitraire, il en résulte que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|$ est convergente. En posant

$$C' - \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C,$$

on a d'une façon générale selon (17)

$$f(x) = \alpha C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n \quad \textit{où} \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n. \tag{18}$$

Soit à présent

$$\xi_n = \begin{cases} \text{sign } C_n & \textit{pour} \quad n \leqslant r \\ \text{sign } C & \textit{pour} \quad n > r. \end{cases}$$

Alors $\|x\| = 1$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \text{sign } C$ et $f(x) = |C| + \sum\limits_{n=1}^{r} |C_n| + \sum\limits_{n=r+1}^{\infty} C_n \cdot \text{sign } C \leqslant |f|$ et, cette inégalité subsistant pour tout r naturel, on obtient $|C| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant |f|$. Comme d'autre part $f(x) \leqslant \left[|C| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|\right] \cdot |x|$, il en résulte que l'on a l'égalité

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|. \tag{19}$$

Conformément aux formules (18) et (19), le théorème suivant se trouve ainsi établi:

Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ où $x = \{\xi_n\}$ définie dans (c) est de la forme

$$f(x) = C \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n\,.$$

et on a

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|\,.$$

4. *Espace $(l^{(r)})$ où $r \geqslant 1$.* Soit, comme auparavant, $x_n = \{\xi_i^n\}$ où ξ_i^n sont définis par la formule (15). On a donc pour $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$ arbitraire $\|x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\| = \sqrt[r]{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^r} \to 0$, d'où

$$x = \sum_{i=1} \xi_i x_i\,. \tag{20}$$

Etant donnée une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans $(l^{(r)})$, posons $f(x_i) = C_i$, d'où selon (20)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i\,. \tag{21}$$

Considérons d'abord le cas où $r = 1$.

Soient $\xi_n = \text{sign } C_n$ et $\xi_i = 0$ pour $i \neq n$. On alors $f(x) = |C_n| \leqslant |f|$. D'autre part, on a pour toute suite $x = \{\xi_i\} \subset (l)$ l'inégalité $|f(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\right)$ $\underset{1\leqslant i<\infty}{\text{borne sup}} |C_i|$ et par conséquent $|f| = \underset{1\leqslant i<\infty}{\text{borne sup}} |C_i|$.

Nous avons donc démontré le théorème:

Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ où $x = \{\xi_i\}$ définie dans (l) est de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$$

où $|f| = \underset{1\leqslant i<\infty}{\text{borne sup}} |C_i|$.

Passons au cas où $r > 1$. Soit $x^0 = \{\xi_i^0\}$ où

$$\xi_i^0 = \begin{cases} |C_i|^{s-1} \cdot \operatorname{sign} C_i & \textit{pour} \quad i \leqslant n, \\ 0 & \textit{pour} \quad i > n \end{cases}$$

et $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. On a alors $\|x^0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^{rs-r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s}$, d'où, selon (21), $f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} |C_i|^s \leqslant |f| \cdot \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s}$, donc $\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s} \leqslant |f|$

et, n étant arbitraire, $\sqrt{\sum_{i=1} |C_i|^s} \leqslant |f|$. D'autre part, pour toute

suite $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$ on a $f(x) = |\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^r} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}$,

d'où finalement l'égalité

$$|f| = \sqrt{\sum_{i+1} |C_i|^s}$$

Nous avons ainsi démontré le théorème:

Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace $(l^{(r)})$ où $r > 1$ est de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \quad \textit{où} \quad x = \{\xi_i\}$$

et on a $|f| = \sqrt{\sum_{i=1} |C_i|^s}$ *où* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

5. *Espace (m) et ses sous-espaces vectoriels séparables.* Soit E un espace vectoriel séparable situé dans (m); les éléments de E sont donc des suites bornées de nombres. Admettons dans E la même norme que dans (m), à savoir

$$|x| = \underset{1 \leqslant i \leqslant \infty}{\text{borne sup}} |\xi_i| \quad \textit{où} \quad x = \{\xi_i\} \subset E.$$

Soit $\{x_n\}$ où $x_n = \{\xi_i^n\}$ la suite d'éléments de E qui forment l'ensemble dénombrable dense dans E. Considérons d'abord x_1 et x_2. Nous allons établir *pour tout* $\varepsilon_2 > 0$ l'existence d'un tel k_2 naturel que l'on ait pour tout couple λ_1 et λ_2 de nombre réels:

$$(22) \qquad |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k_2} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

Ecartons, en effet, le cas de la proportionnalité des nombres ξ_i^1 et ξ_i^2 comme trivial et supposons, par contre, qu'il existe pour tout k naturel un couple λ_1^k et λ_2^k tel que

$$|\lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2| > \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\lambda_1^k \xi_i^1 + \lambda_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

En désignant par m_k celui des nombres $|\lambda_1^k|$ et $|\lambda_2^k|$ qui est plus grand et en posant $l_1^k = \dfrac{\lambda_1^k}{m_k}$ et $l_2^k = \dfrac{\lambda_2^k}{m_k}$, on aurait donc

$$(23) \qquad |l_1^k x_1 + l_2^k x_2| > \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |l_1^k \xi_i^1 + l_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

Comme on a $1 \leqslant |l_1^k| + |l_2^k| \leqslant 2$ pour tout k naturel, on peut extraire des suites $\{l_1^k\}$ et $\{l_2^k\}$ des suites convergentes. Il existe par conséquent une suite $\{k_j\}$ telle que les suites $\{l_1^{k_j}\}$ et $\{l_2^{k_j}\}$ convergent respectivement vers certains nombres l_1 et l_2 où $1 \leqslant |l_1| + |l_2| \leqslant 2$. Comme $\lim\limits_{j \to \infty} k_j = +\infty$ et en outre $\lim\limits_{j \to \infty} |(l_1 x_1 + l_2 x_2) - (l_1^{k_j} x_1 + l_2^{k_j} x_2)| = 0$, on aurait donc, en vertu de (23), $|l_1 x_1 + l_2 x_2| \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant \infty} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2)$, ce qui est impossible, car on a par définition $|l_1 x_1 + l_2 x_2| = \underset{1 \leqslant i \leqslant \infty}{\text{borne sup}} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2|$.

L'existence d'un k_2 naturel satisfaisant pour tout λ_1 et λ_2 à (22) étant ainsi démontrée, on en déduit aisément par induction que, $\{\varepsilon_n\}$ étant une suite arbitrairement donnée de nombres positifs, il existe pour tout $n > 1$ un k_n naturel tel que pour toute suite finie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de nombres réels on a

$$(24) \quad |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k_n} |\lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi_i^2 + \ldots + \lambda_n \xi_i^n| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

Ceci établi, désignons pour tout n naturel donné par x'_i où $i = 1, 2, \ldots, n$ la suite

(25) $$\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_{k_n}^i, 0, 0, 0, \ldots;$$

on a donc en vertu de (24) pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ arbitraires

(26) $$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n| \leqslant |\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \ldots + \lambda_n x'_n| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

Soit à présent $f(x)$ une fonctionnelle linéaire définie dans E. Donc $|f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)| \leqslant |f| \cdot |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n|$, et par conséquent selon (26), $|\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)| \leqslant$ $\leqslant |f| \cdot (1 + \varepsilon_n) \cdot |\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \ldots \lambda_n x_n'|$. Comme par définition de x_i' (voir (25)) on a $x_i' \subset (c)$, il existe en vertu du th. 5, p. 57, une fonctionnelle linéaire $f_n(x)$ définie dans (c) et assujettie aux conditions:

$$f_n(x_i') = f(x_i) \quad \textit{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \textit{et} \quad |f_n| \leqslant |f| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

En tenant compte de la forme générale des fonctionnelles linéaire dans l'espace (c), établie p. 66, et tous les termes des suites x_i' où $i = 1, 2, \ldots, n$ étant d'après (25) des zéros pour les indices supérieurs à k_n, on conclut qu'il existe une suite finie de nombres $a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nk_n}$ assujettie aux conditions:

$$\sum_{j=1}^{k_n} a_{nj}\, \xi_j^i = f_n(x_i') = f(x_i) \quad \textit{pour} \; i = 1, 2, \quad n$$

et

$$\sum_{j=1}^{k_n} |a_{nj}| = |f_n| \leqslant |f| \cdot (1 + \varepsilon_n),$$

d'où, en posant

(27) $$\alpha_{nj} = \begin{cases} \dfrac{a_{nj}}{1 + \varepsilon_n} & \textit{pour} \quad j \leqslant k_n \\ 0 & \textit{pour} \quad j > k_n, \end{cases}$$

on obtient

(28) $$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj}\, \xi_j^i = \frac{1}{1 + \varepsilon_n} f(x_i) \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \quad n$$

et

(29) $$\sum_{=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| \leqslant |f|.$$

Admettons que la suite $\{\varepsilon_n\}$ ait été choisie de façon a avoir $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. En vertu de (28) on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j^i = f(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et nous allons montrer, sans altérer la suite double infinie $\{\alpha_{nj}\}$, que cette forme se laisse généraliser de x_i sur tout $x \subset E$.

Posons à ce but $x = \{\xi_i\}$. La suite d'éléments de la forme $x_n = \{\xi_i^n\}$ étant définie au début comme dense dans E, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $x_i = \{\xi_j^i\}$ tel que $|x - x_i| < \varepsilon$, d'où $\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j - f(x)\right| \leqslant$ $\leqslant \left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} (\xi_j - \xi_j^i)\right| + \left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j^i - f(x_i)\right| + |f(x_i) - f(x)|$ et comme $\sum\limits_{j=1} \alpha_{nj} (\xi_j - \xi_j^i) \leqslant \left(\sum\limits_{j=1} |\alpha_{nj}|\right) \cdot |x - x_i| \leqslant |f| \cdot \varepsilon$, on a pour n suffisamment grand $\left|\sum\limits_{j=1} \alpha_{nj} \xi_j - f(x)\right| \leqslant |f| \cdot \varepsilon + \varepsilon + |f| \cdot \varepsilon = (2|f| + 1) \cdot \varepsilon$ et par conséquent la forme généralisée

$$\text{(30)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1} \alpha_{nj} \xi_j = f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x = \{\xi_j\} \subset E.$$

Enfin, nous allons montrer que

$$\text{(31)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1} |\alpha_{nj}| = |f|.$$

En effet, si l'on pose

$$\text{(32)} \qquad M = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1} |\alpha_{nj}|$$

on a selon (30), $|f(x)| \leqslant M \cdot \text{borne sup}_{1 \leqslant j < \infty} |\xi_j| = M \cdot |x|$, pour tout $x \subset E$, d'où, $|f|$ étant le plus petit nombre tel que $|f(x)| \leqslant$ $\leqslant |f| \cdot |x|$ pour tout $x \subset E$, on conclut que $|f| \leqslant M$, ce qui donne en vertu de (32) et (29) l'égalité (31).

Recueillons à présent les formules (27), (29), (30) et (31): nous voyons que le théorème suivant se trouve établi[1]):

[1]) Ce théorème est dû à M. S. Mazur.

Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans un espace vectoriel séparable E situé dans l'espace (m) est de la forme

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj}\, \xi_j$$

où $x = \{\xi_j\}$ et $\{\alpha_{nj}\}$ est un tableau de nombres réels satisfaisant aux conditions:

1° $\alpha_{nj} = 0$ *pour* $j > k_n$ *où* $\{k_n\}$ *est une suite de nombres naturels,*

2° $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| \leqslant |f|$ *pour* $n = 1, 2, \dots,$

3° $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| = |f|$.

§ 5. *Suites fermées et complètes dans les espaces* (C), $(L^{(r)})$, (c) *et* $(l^{(r)})$.

Nous allons appliquer à présent les résultats qui précèdent à plusieurs notions et problèmes liés avec les propriétés des espaces particuliers que nous venons de considérer.

Une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (C)$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ est dite *fermée dans* (C), lorsqu'il existe pour toute fonction $x(t) \subset (C)$ une suite de combinaisons linéaires $\left\{ \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t) \right\}$ tendant uniformément vers $x(t)$.

La suite $\{x_n(t)\}$ s'appelle *complète dans* (C), lorsque, $g(t)$ étant une fonction quelconque à variation bornée, les conditions $\int_0^1 x_n(t)\, dg = 0$ pour tout $n = 1, 2, \dots$ entraînent l'égalité $g(0) = g(t) = g(1)$, excepté un ensemble au plus dénombrable de valeurs de t.

Une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (L^{(r)})$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ est dite *fermée dans* $(L^{(r)})$, lorsqu'il existe pour toute fonction $x(t) \subset (L^{(r)})$ une suite $\{g_n\}$ de fonctions de la forme $g_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t)$ convergente en moyenne avec la r-ième puissance vers $x(t)$, c. à d. telle que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x(t) - g_n(t)|^r\, dt = 0$.

La suite $\{x_n(t)\}$ s'appelle *complète dans* $(L^{(r)})$, lorsque, $g(t)$ étant une fonction arbitraire qui est mesurable et bornée ou qui appartient à $(L^{(s)})$ ou $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, suivant que $r=1$ ou $r>1$, les conditions $\int\limits_0^1 x_n(t)\, g(t)\, dt=0$ pour $n=1,2,\ldots$ entraînent presque partout l'égalité $g(t)=0$.

Les deux notions interviennent dans la théorie des séries orthogonales.

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions soit fermée dans (C), resp. dans $(L^{(r)})$, est qu'elle soit fondamentale (dans le sens défini au § 3, p. 58, de ce chapitre). De-même, pour qu'elle soit complète, il faut et il suffit qu'elle soit totale (dans le sens défini *ibidem*). Il suffit, en effet, de rappeler la forme générale des fonctionnelles linéaires dans (C), resp. $(L^{(r)})$, établie p. 61, resp. 64—65.

Enfin, le th. 7, p. 58, implique aussitôt que *pour qu'une suite de fonctions soit complète dans (C), resp. dans $(L^{(r)})$, il faut et il suffit qu'elle y soit fermée.*

En procédant d'une façon analogue, on peut établir les notions de suites fermées et de suites complètes pour les espaces (c) et $(l^{(r)})$.

§ **6.** *Approximation des fonctions appartenant à (C) et $(L^{(r)})$ par des combinaisons linéaires de fonctions.*

Aussi le th. 6, p. 58, est susceptible d'interprétation dans divers espaces normés particuliers. En voici deux exemples:

1. *Espace (C). Pour qu'il existe des polynômes formés de termes de la suite $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (C)$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ qui approchent uniformément une fonction donnée $x(t) \subset (C)$, il faut et il suffit que, $g(t)$ étant une fonction quelconque à variation bornée, les conditions $\int\limits_0^1 x_n(t)\, dg=0$ pour $n=1,2,\ldots$ entraînent l'égalité $\int\limits_0^1 x(t)\, dg=0$.*

2. *Espaces ($L^{(r)}$). Pour qu'il existe des combinaisons linéaires formées de termes de la suite $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (L^{(r)})$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ qui approchent avec la r-ième puissance en moyenne une fonction donnée $x(t) \subset (L^{(r)})$, il faut et il suffit que, $g(t)$ étant une fonction arbitraire, mesurable et bornée lorsque $r = 1$ et appartenant à $(L^{(s)})$ où $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ lorsque $r > 1$, les conditions $\int_0^1 g(t)\, x_n(t)\, dt = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ entraînent l'égalité $\int_0^1 g(t)\, x(t)\, dt = 0$.*

§ 7. *Le problème des moments.*

Passons aux applications du th. 5, p. 57.

On a donné le nom du *problème des moments* au problème qui consiste à établir des conditions pour l'existence d'une fonction f satisfaisant à l'infinité d'équations

$$\int_u^v f \varphi_i \, dt = c_i \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

pour une suite de fonctions $\{\varphi_i\}$ et une suite de nombres $\{c_i\}$ données d'avance.

Nous donnons ici la solution de ce problème dans deux cas particuliers d'espaces normés: elle s'obtient par l'interprétation convenable du th. 5, p. 57, dans ces espaces.

I. *Espace (C).* Soit $x_i = x_i(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ une fonction continue. Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ dans (C) étant (cf. p. 61) de la forme $f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg$ où $\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{variation}}\, g(t) = |f|$, on obtient du th. 5, p. 57, le théorème [1]):

Pour qu'il existe une fonction $g(t)$ à la

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{variation}}\, g(t) \leqslant M$$

et satisfaisant aux équations

[1]) Ce théorème a été trouvé par F. Riesz (cf. les travaux de F. Riesz et de E. Helly cités ici p. 56, note [1])).

$$\int\limits_0 x_i(t)\, dg = c_i \quad pour \quad i = 1, 2, \dots,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie $h_1, h_2, \dots, h_r$ *de nombres réels*

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i(t)\right|.$$

II. *Espace* $(L^{(r)})$. Pour $r > 1$ on parvient, en procédant d'une façon analogue, au théorème[1]):

Pour qu'il existe une fonction $\alpha(t)$ *où* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *telle que*

$$\int\limits_0 |\alpha(t)|^s dt \leqslant M^s \quad où \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

et qui remplisse les équations

$$\int\limits_0^1 x_i(t)\, \alpha(t)\, dt = c_i \quad où \quad x_i(t) \subset (L^{(r)} \quad et \quad i = 1, 2, \dots,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie $h_1, h_2, \dots, h_k$ *de nombres réels*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \sqrt[r]{\int\limits_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} h_i x_i(t)\right|^r dt}.$$

Pour $r = 1$, *les fonctions* $x_i(t)$ *sont intégrables et la fonction cherchée* $\alpha(t)$ *est bornée et telle que*

$$\text{vrai} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\alpha(t)| \leqslant M.$$

La condition nécessaire et suffisante est alors la suivante:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \int^1 \left|\sum_{i=1}^{k} h_i x_i(t)\right| dt.$$

[1]) Ce théorème est dû également à F. Riesz, l. c.

§ 8. *Conditions pour l'existence des solutions de certains systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.*

Considérons un autre problème.

Etant donnés un tableau $\{\alpha_{ik}\}$ et une suite $\{c_i\}$ de nombres, nous allons chercher d'établir des conditions pour l'existence d'une suite de nombres $\{z_i\}$ satisfaisant à l'infinité d'équations

$$(34) \qquad \sum^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \quad où \quad i = 1, 2, \ldots$$

Nous donnons ici, également à l'aide du th. 5, p. 57, la solution de ce problème dans deux cas particuliers d'espaces:

III. *Espace* (c). Soient $x_i = \{\alpha_{ik}\}$ et

$$(35) \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha_{ik} = 0 \quad pour \ i = 1, 2, \ldots$$

Toute fonctionnelle linéaire dans l'espace (c) étant de la forme $f(x) = C \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i + \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$ où $x = \{\xi_i\}$ et $|f| = |C| + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |C_i|$ (cf. p. 66), le th. 5, p. 57, donne en vertu de (35) l'énoncé suivant:

Pour qu'il existe une suite de nombres $\{z_k\}$ *qui remplisse les équations* (34) *en même temps que la condition* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k| \leqslant M$, *il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie de nombres* $h_1, h_2, \ldots, h_r$ *l'inégalité*

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \underset{1\leqslant k<\infty}{\text{borne sup}} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i \alpha_{ik}\right|$$

IV. *Espace* (l). Soient $x_i = \{\alpha_{ik}\}$ et $\sum\limits_{k=1} |\alpha_{ik}| < \infty$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Toute fonctionnelle linéaire dans (l) étant de la forme $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i \xi_i$ où $x = \{\xi_i\}$ et $|f| = \underset{1\leqslant i<\infty}{\text{borne sup}} |z_i|$ (cf. p. 67), le th. 5, p. 57 donne immédiatement l'énoncé suivant:

Pour qu'il existe une suite bornée $\{z_k\}$ *qui remplisse les équations* (34) *en même temps que la condition* $\operatorname*{borne\ sup}_{1 \leqslant k < \infty} |z_k| \leqslant M$, *il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie de nombres réels* $h_1, h_2, \dots, h_r$ *l'égalité*

$$\sum_{i=1}^{r} h_i c_i \leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} \right|$$

CHAPITRE V.

Espaces du type *(B)*.

§ 1. *Opérations linéaires dans les espaces du type* (*B*).

Nous allons établir ici quelques théorèmes généraux sur les espaces E du type (B)[1], dans lesquels leur propriété qu'ils sont non seulement normés, mais aussi *complets*, intervient d'une façon essentielle.

Théorème 1. *$F(x)$ étant une opération mesurable (B) et $U(x)$ une opération additive, définies toutes les deux dans E et telles que $|F(x)| \geqslant |U(x)|$ pour tout $x \subset E$, l'opération $U(x)$ est linéaire.*

Démonstration. Il existe en vertu du th. 4 de l'Introduction p. 17, un ensemble $H \subset E$ de I-e catégorie tel que l'opération $F(x)$ est continue dans $E - H$. Il existe par conséquent pour $x_0 \subset E - H$ un $r > 0$ et un $M > 0$ tels que

$$(1) \quad |x - x_0| \leqslant r \text{ entraîne } |U(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant M \text{ pour tout } x \subset E - H.$$

L'ensemble des points $x \subset E - H$ tels que $|x - x_0| \leqslant \frac{r}{2}$ étant de II-e catégorie, il en est à plus forte raison de même de l'ensemble G de tous les points de la forme $x' + x$ où $|x'| < \frac{r}{2}$, $x \subset E - H$ et $|x - x_0| \leqslant \frac{r}{2}$. Il existe donc dans G un élément $x' + x_1 \subset E - H$ où $x_1 \subset E - H$. Comme $|x_1 -$ $\leqslant \frac{r}{2}$, on a

[1]) voir la définition de ces espaces Chap. IV, p. 53.

$|x'+x_1-x_0|\leqslant r$, d'où, selon (1), $|U(x')|\leqslant|U(x'+x_1)|+|U(x)|\leqslant \leqslant 2M$. La norme de $U(x)$ est par conséquent bornée dans la sphère $|x|\leqslant\frac{r}{2}$, donc, évidemment dans toute sphère. Il en résulte en vertu du th. 1 (Chap. IV, § 2), p. 54, que l'opération $U(x)$ est continue.

Théorème 2. *Si, pour une opération additive $U(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ entraîne $\underline{\lim}_{n\to\infty} |U(x_n)| \geqslant |U(x)|$ pour tout $x \subset E$, l'opération $U(x)$ est linéaire* [1].

Démonstration. L'ensemble G_n de tous les $x\subset E$ tels que $|U(x)|\leqslant n$ est pour tout $n=1,2,\ldots$ fermé et comme $E=\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, un au moins des ensembles G_n contient une sphère dans laquelle la norme de $U(x)$ est bornée, d'où, comme dans le th. précédent, la continuité de l'opération $U(x)$.

Théorème 3. *Si une suite d'opérations linéaires $\{U_n(x)\}$ définies dans l'espace E est convergente dans un ensemble G qui est dense dans une sphère K et si la suite des normes $\{|U_n|\}$ est bornée, la suite des opérations $\{U_n(x)\}$ est convergente dans l'espace E tout entier* [2].

Démonstration. Etant donné un $x_0 \subset K$, il existe par hypothèse une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n\subset G$ pour $n=1,2,\ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Or, on a pour trois nombres n, p et q quelconques:

$$|U_p(x_0)-U_q(x_0)|\leqslant|U_p(x_0-x_n)|+|U_q(x_n-x_0)|+|U_p(x_n)-U_q(x_n)|,$$

donc

$$\overline{\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}}\,|U_p(x_0)-U_q(x_0)|\leqslant 2M|x_0-x_n| \quad \textit{où}\ M=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|U_p|,$$

[1] Cf. S. Banach. l. c., Fund. Math. III (1922), p. 153, th. 3.

[2] Cf. S. Banach et H. Steinhaus, l. c., Fund. Math. IX (1927), p. 53.

d'où, comme $\lim_{n\to\infty} |x_0 - x_n| = 0$, on a $\lim_{p\to\infty\, q\to\infty} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| = 0$, ce qui implique la convergence de la suite $U_n(x_0)$.

Etant donné à présent un élément arbitraire $x \subset E$ et x'_0 désignant en particulier le centre de la sphère K, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $x'_0 + \varepsilon x \subset K$, donc que la suite $U_n(x'_0 + \varepsilon x)$ est convergente. La convergence de $U_n(x)$ en résulte en vertu de celle de $U_n(x'_0)$ et de $U_n(x'_0 + \varepsilon x)$.

Théorème 4. *Etant donnée une suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires définies dans E, l'ensemble H de tous les $x \subset E$ pour lesquels $\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < \infty$ est soit de I-e catégorie, soit identique à E* [1].

La démonstration résulte du th. 1 (Chap. III, § 1), p. 36, vu que H est un ensemble linéaire et mesurable (B).

Théorème 5. *Etant donnée dans E une suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires telles que $\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < \infty$ pour tout $x \subset E$, la suite des normes $\{|U_n|\}$ est bornée* [2].

Démonstration. En vertu du th. 11 de l'Introduction, p. 19, il existe une sphère $K \subset E$ et un nombre N tels que l'on a $|U_n(x)| \leqslant \leqslant N$ pour tout $x \subset K$ et $n = 1, 2, \ldots$ En désignant par r le rayon de la sphère K, on en tire facilement $|U_n| \leqslant \frac{2N}{r}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Théorème 6. *Etant donnée une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E telle que l'on a $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(x)| < \infty$ pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E, la suite des normes $\{|x_n|\}$ est bornée.*

Démonstration. L'ensemble $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E constitue, en y conservant la définition de la norme adoptée pour ces fonctionnelles, un espace du type (B). Définissons dans $\overline{E}$ une suite de fonctionnelles $\{F_n\}$, en posant $F_n(f) = f(x_n)$ pour tout $f \subset \overline{E}$. L'hypothèse $\overline{\lim} |f(x_n)| < \infty$

[1]) ibidem, p. 55.
[2]) ibidem, p. 57.

entraîne par conséquent $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |F_n(f)| < \infty$ pour tout $f \subset \overline{E}$. En vertu du th. 5, qui précède, il existe donc un nombre N tel que $|F_n(f)| \leqslant N \cdot |f|$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ D'autre part comme $x_n \subset E$, il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle linéaire $f_n(x)$ définie dans E et telle que l'on a $|f_n(x_n)| = |x_n|$ et $|f_n| = 1$. On a donc $|x_n| = |f_n(x_n| =$ $= |F_n(f_n)| \leqslant N \cdot |f_n| = N$, quel que soit n, c. q. f. d.

§ 2. *Principe de condensation des singularités.*

Théorème 7. *Etant donnée dans E une suite double d'opérations linéaires $\{U_{pq}(x)\}$ telles que*

$$(2) \qquad \overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}| = \infty \text{ pour tout } p = 1, 2, \ldots,$$

il existe un ensemble $G \subset E$ (indépendant de p) de II-e catégorie dans E et tel que l'on a pour tout $x \subset G$:

$$(3) \qquad \overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| = \infty \text{ pour tout } p = 1, 2, \ldots [1]).$$

Démonstration. L'ensemlbe H_p de tous les élements $x \subset E$ tels que $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| < \infty$ ne peut coïncider avec E, car en vertu du th. 5, p. 80, l'hypothèse (2) se trouverait contredite. Il en résulte en vertu du th. 4, p. 80, que H_p, et par suite l'ensemble $H = \sum\limits_{p=1}^{\infty} H_p$ de tous les éléments $x \subset E$ pour lesquels la condition (3) *est en défaut*, est de I-e catégorie dans E. Il ne reste donc qu'à poser $G = E - H$.

Remarque. Les contredomaines E_p des suites $\{U_{pq}\}$ peuvent varier avec $p = 1, 2, \ldots$, tandis que pour tout p donné ils doivent évidemment être supposés identiques pour toutes les valeurs de q, puisqu'on fait intervenir dans l'énoncé du th. 7 la notion de convergence des suites $\{U_{pq}(x)\}$ avec q tendant vers ∞.

[1]) ibidem, p. 54, th. I.

Le th. 7 qui précède constitue, avec le th. 6 (Chap. I, § 4), p. 24, au point de vue fonctionnel ce qu'on appelle le *principe de condensation des singularités.* Nous allons l'expliquer sur des exemples [1].

Soit $\{g_k(t)\}$ une suite orthogonale et normée de fonctions à carré sommable dans [0,1]. Etant donnée une fonction quelconque $x(t)$ intégrable dans [0,1], la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$$

s'appelle *le développement de la fonction* $x(t)$ *suivant la suite* $\{g_k(t)\}$ (pourvu, bien entendu, que les intégrales $\int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$ existent pour tout $k = 1, 2, \ldots$).

On a les théorèmes suivants p. ex. dans les espaces (C) et (L):

Dans (C). *Etant donnée une suite* $\{t_p\}$ *de points de* [0,1], *l'existence pour tout* $p = 1, 2, \ldots$ *d'une fonction continue* $x_p(t)$ *dont le développement dans le point* t_p *est divergent, resp. non borné, entraîne l'existence d'une fonction continue* $x(t)$ *dont le développement est divergent, resp. non borné, dans tout point* t_p *où* $p = 1, 2, \ldots$

La démonstration résulte du th. 7, p. 81, et du th. 6 (Chap. I, § 4), p. 24, si l'on pose

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t_p) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds,$$

en regardant $U_{pq}(x)$ comme des fonctionnelles linéaires dans (C).

Dans (L). *Etant donnée une suite d'intervalles* $\{[\alpha_p, \beta_p]\}$ *situés sur* [0,1], *l'existence pour tout* $p = 1, 2, \ldots$ *d'une fonction intégrable* $x_p(t)$ *dont le développement jouit de la propriété*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} s_n(t)\, dt = \infty \quad \text{où} \quad s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) \int_0^1 g_k(t)\, x_p(t)\, dt$$

[1] cf. ibidem, p. 56—61.

entraîne l'existence d'une fonction intégrable $x(t)$ dont le développement jouit de la même propriété dans tous les intervalles $[\alpha_p, \beta_p]$ à la fois.

La démonstration résulte du th. 7, p. 81, en posant

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t) \int_0^1 g_k(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{pour} \quad \alpha_p \leqslant t \leqslant \beta_p$$

et en regardant $U_{pq}(x)$ comme des opérations linéaires définies dans l'espace des fonctions intégrables dans $[0,1]$ et dont les contredomaines sont situés respectivement dans les espaces des fonctions intégrables dans $[\alpha_p, \beta_p]$.

Remarque. En particulier, si les points à coordonnées α_p, β_p forment un ensemble dense dans le carré $[0,1; 0,1]$, la propriété en question de $x(t)$ se présente dans tout intervalle $[\alpha, \beta]$ de $[0,1]$.

En s'appuyant sur cette remarque, on peut démontrer pour les séries de Fourier *l'existence d'une fonction intégrable $x(t)$ telle que l'on ait $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \int_\alpha^\beta s_n(t)\, dt \right| = \infty$ dans tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset [0,2\pi]$.*

§ 3. *Espaces du type (B) compacts.*

Lemme. *Etant donné un ensemble linéaire fermé G qui est un vrai sous-ensemble d'un ensemble linéaire $D \subset E$, il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $x_0 \subset D$ tel que l'on a*

$$|x_0| = 1 \quad \textit{et} \quad |x_0 - x| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \textit{pour tout } x \subset G.$$

Démonstration. Soient: $x' \subset D - G$, d la distance de x' à G et η un nombre positif arbitraire. Il existe donc un $y' \subset G$ tel que $d \leqslant |x' - y'| \leqslant d + \eta$. Posons $x_0 = \dfrac{x' - y'}{|x' - y'|}$. Pour tout $x \subset G$ on a alors $|x_0 - x| = \dfrac{1}{|x' - y'|} \cdot |x' - y' - |x' - y'| \cdot x|$ et comme

les relations $x \subset G$ et $y' \subset G$ entraînent $y' + |x' - y'| \cdot x \subset G$, on en obtient $|x_0 - x| \geqslant \frac{1}{|x' - y'|} \cdot d \geqslant \frac{d}{d+\eta}$, d'où, en posant $\eta = d \cdot \frac{\quad}{1-\varepsilon}$, il vient $|x_0 - x| \geqslant 1 - \varepsilon$.

Evidemment, on a aussi $|x_0| = \frac{|x' - y'|}{|x' - y'|} = 1$ et $x_0 \subset D$, car $x' \subset D$ et $y' \subset G \subset D$.

Théorème 8. *Si tout ensemble d'éléments de E dont les normes constituent un ensemble borné est compact, il existe dans E une suite finie d'éléments* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *tels que tout* $x \subset E$ *est de la forme*

$$(4) \qquad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *sont des nombres (qui dépendent de x).*

Démonstration. Soient: x_1 un élément arbitraire de E tel que $|x_1| = 1$ et x_{r+1}, où $r > 1$, un élément arbitraire de E tel que

$$(5) \qquad |x_{r+1}| = 1 \quad \textit{et} \quad |x_{r+1} - x_i| \geqslant \frac{1}{2} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Désignons pour tout $r \geqslant 1$ par G_r l'ensemble de tous les éléments $x \subset E$ qui sont de la forme (4) et posons $D = E$. En supposant que le théorème n'est pas vrai, on aurait donc toujours $G_r \subset D$ et $G_r \neq D$, d'où, selon le lemme qui précède (avec $G = G_r$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $x_0 = x_{r+1}$), l'existence pour tout r naturel d'un $x_{r+1} \subset E$ assujetti à (5), c. à d. d'une suite infinie $\{x_r\}$ telle que $|x_r| = 1$ et $|x_p - x_q| \geqslant \frac{1}{2}$ pour $p \neq q$.

Cette suite ne contiendrait par conséquent aucune suite convergente; elle constituerait donc un ensemble non compact, bien que l'ensemble correspondant des normes soit borné. On serait ainsi en contradiction avec l'hypothèse du théorème.

§ 4. *Une propriété des espaces* $(L^{(r)})$, (c) *et* $(l^{(r)})$.

Par l'application du th. 4 (Chap. I, § 3), p. 23, à la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans ces espaces, on obtient les théorèmes suivants:

Pour $(L^{(r)})$ *où* $r \geqslant 1$. *Si* $\alpha(t)$ *ou* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *est une fonction mesurable et s'il existe pour toute fonction* $x(t) \subset (L^{(r)})$ *l'intégrale* $\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$, *alors* $\int_0^1 |\alpha(t)|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$ *pour* $r > 1$ *et* $\alpha(t)$ *est une fonction bornée pour* $r = 1$ [1].

Démonstration. Posons pour n naturels

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{pour} \quad |\alpha(t)| \leqslant n \\ n \operatorname{sign} \alpha(t) & \text{pour} \quad |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Nous avons alors $|x(t)\,\alpha(t)| \geqslant |x(t)\,\alpha_n(t)|$, donc, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \alpha(t)$, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt.$$

L'expression $\int_0 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt$ étant pour tout $n = 1, 2, \ldots$ une fonctionnelle linéaire dans $(L^{(r)})$ (car $\alpha_n(t)$ est une fonction bornée), $\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ est en vertu du th. 4, p. 23, également une fonctionnelle linéaire. Il existe par conséquent, en vertu du théorème sur la forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces $(L^{(r)})$ où $r > 1$ (voir p. 64), une fonction $\bar{\alpha}(t) \subset (L^{(\frac{r}{r-1})})$ telle que $\int^1 x(t)\,\bar{\alpha}(t)\,dt = \int^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ pour tout $x(t) \subset (L^{(r)})$. En posant donc

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 & \text{pour} \quad t_0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

on a $\int_0^{t_0} \bar{\alpha}(t)\,dt = \int_0^{t_0} \alpha(t)\,dt$ pour tout $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$, d'où *presque partout* $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$.

[1] Pour $r > 1$ ce théorème est dû à M. F. Riesz.

On procède d'une façon analogue pour $r = 1$.

Pour (c). *Si pour toute suite convergente* $x = \{\xi_i\}$ *la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *est convergente, on a* $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$.

Démonstration. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ étant pour tout $n = 1, 2, \ldots$ une fonctionnelle linéaire dans l'espace (c) et comme $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, on conclut du th. 4, p. 23, que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ est également une fonctionnelle linéaire. Il existe par conséquent un $M > 0$ tel que

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i\right| \leqslant M \cdot \|x\| = M \cdot \underset{1 \leqslant i < \infty}{\text{borne sup}} |\xi_i| .$$

En posant donc

$$\xi_i = \begin{cases} \text{sign } \alpha_i & \textit{pour} \quad i \leqslant n \quad \textit{et} \quad \alpha_i \neq 0 \\ 0 & \textit{pour} \quad i > n \quad \textit{ou} \quad \alpha_i = 0, \end{cases}$$

on obtient $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant M$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, d'où $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant M$.

Pour $(l^{(r)})$ *où* $r \geqslant 1$. *Si la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *est convergente pour toute suite* $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$, *alors* $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$ *pour* $r > 1$ *et la suite* $\{\alpha_i\}$ *est bornée pour* $r = 1$ [1]).

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

§ 5. *Espaces du type (B) formés de fonctions mesurables.*

Nous allons nous arrêter un peu sur quelques propriétés des espaces du type (B) assujettis à des conditions plus spéciales. Admettons à ce but que E soit l'espace des fonctions mesurables définies dans l'intervalle fermé $[0,1]$ et telles qu'on ait pour tout $x_n = x_n(t) \subset E$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$:

1. $\lim \|x_n\| = 0$ *entraîne* lim as $x_n(t) = 0$;

[1]) Ce dernier théorème a été trouvé par M. E. Landau (*Über einen Konvergenzsatz*, Göttinger Nachr. 1907, p. 25—27).

2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ *entraîne l'existence dans E d'une suite partielle $\{x_{n_i}(t)\}$ et d'un x tels que l'on ait $|x_{n_i}(t)| \leqslant |x(t)|$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ et pour presque tout $0 \leqslant t \leqslant 1$* ($|\ |$ désignant ici la valeur absolue);

3. $\lim_{n\to\infty}$ as $x_n(t) = x(t)$ *entraîne* $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$.

Tels sont, en particulier, *les espaces* (M), (C) *et* $(L^{(r)})$, envisagés à plusieurs reprises (v. pages 10—12, 59—64 et 72—76); s'il s'agit de réaliser la condition 2., on n'a qu'à définir pour $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n_i}\| < \infty$ la fonction $x(t)$ par l'égalité $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_i}(t)|$.

Théorème 9. *Soient E et E_1 deux espaces du type (B) assujettis aux conditions* 1., 2. *et* 3. *et $K(s, t)$ une fonction définie dans le carré* [0,1; 0,1]. *Si l'intégrale*

$$u(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{6}$$

existe pour tout $x \subset E$ et pour presque toute valeur de s et si $u(s) \subset E_1$, elle est une opération linéaire[1])

Démonstration. Posons

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \tag{7}$$

et désignons par $\{\overline{x_n}\}$ une suite quelconque extraite de $\{x_n\}$. En vertu de (7) et de la condition 2., il existe dans E une suite partielle $\{x_{n_i} - x\}$ et un $z \subset E$ tels que l'on a pour tout $i = 1, 2, \ldots$ presque partout $|\overline{x}_{n_i}(t) - x(t)| \leqslant z(t)$. Evidemment $\lim_{i\to\infty}$ as $K(s, t) \cdot [\overline{x}_{n_i}(t) - x(t)] = 0$, et $|K(s, t) \cdot (\overline{x}_{n_i} - x)| \leqslant |K(s, t)| \cdot z(t)$. De plus l'intégrale $\int_0^1 K(s, t)\, z(t)\, dt$ existe dans un ensemble H de mesu-

[1]) Cf. S. Banach, l. c., Fund. Math. III (1922), p. 166, th. 2.

re 1, car $z \subset E$. On a donc $\lim_{i\to\infty} \int_0^1 K(s,t)\,[\bar{x}_{n_i}(t) - x(t)]\,dt = 0$ et par conséquent $\lim_{i\to\infty} \int_0^1 K(s,t)\,\bar{x}_{n_i}(t)\,dt = \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt$ pour $s \subset H$.

Or, toute suite extraite de $\{u_n(s) = \int_0^1 K(s,t)\,x_n(t)\,dt\}$ contenant une suite partielle qui converge presque partout vers $u(s)$, on a $\lim_{n\to\infty} \text{as}\, u_n(s) = u(s)$, ce qui implique selon 3. et le th. 2, p. 79, que l'opération (6) est linéaire.

§ 6. *Exemples des opérations linéaires dans quelques espaces particuliers du type (B).*

Nous donnons ici quelques applications du th. 9, qui vient d'être établi, aux espaces (M), (C) et $(L^{(r)})$.

Espace (M). Si $K(s,t)$ où $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ est une fonction mesurable et si pour tout s on a $\int_0^1 |K(s,t)|\,dt < N < \infty$, l'expression

$$(8) \qquad U(x) = \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt$$

est une opération linéaire définie dans (M) et dont le contredomaine est situé dans (M).

Espace (C). Si la fonction $K(s,t)$ est continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'expression (8) est une opération linéaire définie dans l'espace (C), son contredomaine étant aussi situé dans (C).

Espace (L). Si $K(s,t)$ est une fonction mesurable dans le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et telle que $\int_0^1 C(s)\,ds < N < \infty$ où $C(s) = \text{vrai}\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |K(s,t)|$, l'expression (8) est une opération linéaire de domaine (L) et de contredomaine $\subset (L)$.

Espaces $(L^{(p)})$. $K(s,t)$ étant une fonction mesurable dans le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et telle que pour tout couple de fonctions $x(t) \subset (L^{(p)})$ et $y(s) \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$ où $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < \infty, \tag{9}$$

l'expression (8) est une opération linéaire définie dans $(L^{(p)})$ et dont le contredomaine est situé dans $(L^{(q)})$.

En effet, étant donné un $x \subset (L^{(p)})$ quelconque, on a pour tout $y \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$:

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt = \int_0^1 y(s) \left[\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt\right] ds,$$

d'où (cf. p. 85) $\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \subset (L^{(q)})$ et par conséquent, selon (8), $U(x)$ est une opération linéaire.

Pour que la condition (9) se trouve vérifiée, il suffit d'admettre que $\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt < \infty$, où r est le plus petit des nombres p et $\frac{q}{q-1}$ (en particulier, que la fonction $K(s,t)$ et bornée, lorsque $r = 1$, et intégrable, lorsque $p = q = +\infty$).

On a, en effet, en vertu de l'inégalité de Riesz:

$$\left|\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt\right| \leqslant \left\{\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt\right\}^{\frac{r-1}{r}} \cdot \left\{\int_0^1 |x(s)|^r ds\right\}^{\frac{1}{r}} \cdot$$

$\left\{\int_0^1 |y(t)|^r dt\right\}^{\frac{1}{r}}$. En particulier, pour $p = q = 2$, la condition (9) peut donc être remplacée par $\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2 ds\, dt < \infty$, ce qui implique que l'opération (8) est linéaire dans $(L^{(2)})$ et que son contredomaine est également contenu dans $(L^{(2)})$.

La même remarque s'applique aux cas où $p = q = 1$ et $p = q = \infty$.

§ 7. *Quelques théorèmes sur les méthodes de sommation.*

Etant donné un tableau infini de nombres

$$(A) \qquad \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1k}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2k}, \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \ldots, & a_{ik}, \end{matrix}$$

nous dirons qu'une suite de nombres $x = \{\xi_k\}$ est *sommable (vers $A(x)$) par la méthode* A (qui correspond au tableau (A)), lorsque chacune des séries $A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ est convergente et la suite $\{A_i(x)\}$ converge aussi (vers $A(x)$).

La méthode A est dite *permanente*, lorsque toute suite convergente est sommable par cette méthode vers sa limite. Elle s'appelle *reversible*, lorsqu'à toute suite convergente $\{\eta_i\}$ vient correspondre exactement une suite x (convergente ou non) telle que $A_i(x) = \eta_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Nous dirons qu'une méthode B (qui correspond au tableau $(B) = \{\{b_{ik}\}\}$) n'est *pas plus faible de* A, lorsque toute suite sommable par la méthode A l'est aussi par la méthode B.

Enfin, une méthode A porte le nom de méthode *parfaite*, lorsqu'elle est à la fois permanente, reversible et telle que les conditions

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty \quad et \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \quad pour \ k = 1, 2, \ldots$$

entraînent

$$(11) \qquad \alpha_i = 0 \quad pour \ tout \ i = 1, 2, \ldots$$

Théorème 10. *Pour qu'une méthode* A *soit permanente, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:*

1⁰ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

2⁰ $\lim a_{ik} = 0$ *pour tout* $k = 1, 2, \ldots$

3⁰ $\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1$ [1].

Démonstration. Nécessité. La convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$ pour toute suite convergente $x = \{\xi_k\}$ et pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots$ entraîne (cf. p. 86, pour (c)) la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$. Les fonctionnelles $A_i(x)$, définies dans l'espace (c), sont par conséquent linéaires et comme elles forment une suite convergente, on en conclut d'après le th. 5, p. 80, que la condition 1⁰ est remplie.

Soient d'autre part: $\xi_i^0 = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots$, $\xi_i^n = 0$ pour $i \neq n$ et $\xi_n^n = 1$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ Posons $x_n = \{\xi_i^n\}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On a $A_i(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ et $A_i(x_n) = a_{in}$ pour i et n naturels, donc $A(x_0) = 1$ et $A(x_n) = 0$ pour $n > 0$, de sorte que les conditions 2⁰ et 3⁰ sont également remplies.

Suffisance des trois conditions résulte du th. 3, p. 79, et du fait que la suite $\{x_n\}$ définie tout à l'heure est dans l'espace (c) fondamentale.

Lemme 1. *Soient* A *une méthode permanente et* $y_0 = \{\eta_i^0\}$ *une suite convergente. Si pour toute suite de nombres* $\{\alpha_i\}$ *les conditions* (10) *entraînent l'égalité* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$, *il existe pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *une suite convergente* x *telle que l'on a*

$$(12) \qquad |A_i(x) - \eta_i^0| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, \ldots$$

[1]) Ce théorème est dû à O. Toeplitz. *(Über allgemeine lineare Mittelbildungen,* Prace Mat. Fiz. XXII, Varsovie (1911), p. 113—119).

Démonstration. Désignons par G l'ensemble de toutes les suites convergentes $\{\eta_i\}$ auxquelles correspondent des suites convergentes x telles que $\eta_i = A_i(x)$ pour $i = 1, 2, \dots$ Considéré dans l'espace (c), l'ensemble G ainsi défini constitue évidemment un espace vectoriel. Si y_0 n'est pas un point d'accumulation de G, il existe en vertu du lemme (Chap. IV, § 3), p. 57, une fonctionnelle linéaire $F(y)$ définie dans (c) et telle que l'on a $F(y_0) = 1$ et $F(y) = 0$ pour tout $y \subset G$. Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (c) (cf. Chap. IV § 4, p. 66), il existe donc une suite de nombres $\{\alpha_i\}$ telle que la série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ est absolument convergente et que:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i + \alpha \lim_{i\to\infty} \eta_i = 0 \quad pour \ \{\eta_i\} \subset G,$$

$$(14) \qquad \sum_{i=1} \alpha_i \eta_i^0 + \alpha \lim_{i\to\infty} \eta_i^0 = 1.$$

La méthode A étant permanente, on a d'après (13)

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) + \alpha \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0 \quad pour\ tout\ x = \{\xi_k\} \subset (c)$$

et le th. 10 qui précède entraîne l'existence d'un M satisfaisant à la condition 1° de son énoncé. On a par consequent $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k| \leqslant$ $\leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \|x\|$, d'où

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}$$

En posant pour un k naturel fixe $\xi_k = 1$ et $\xi_n = 0$ pour $n \neq k$, on conclut de (15) que

$$(17) \qquad \sum_{i=1} \alpha_i a_{ik} = 0 \quad pour\ k = 1, 2, \dots$$

En posant ensuite $\xi_k = 1$ pour $k = 1, 2, \dots$, on tire de (15),

(16) et (17) que $\alpha_i = 0$, d'où, en vertu de (14), que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 1$, ce qui est, en raison de (17), en contradiction avec l'hypothèse.

Lemme 2. *Si la méthode* A *est permanente et les conditions* (10) *entraînent la condition* (11), *il existe pour toute suite convergente* $\{\eta_i^0\}$ *et pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *une suite convergente* x *satisfaisant à la condition* (12).

La démonstration est immédiate en vertu du lemme 1, qui précède.

Lemme 3. $x_0 = \{\xi_k^0\}$ *étant une suite bornée, sommable par une méthode permanente* A, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *une suite convergente* x *telle que*

$$(18) \qquad |A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. Posons

$$(19) \qquad \eta_i^0 = A_i(x_0) \quad \textit{pour } i = 1, 2, \ldots$$

et désignons par $\{\alpha_i\}$ une suite quelconque assujettie aux conditions (10), p. 90.

On, a selon (19)

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_0)$$

et, A étant une méthode permanente, il existe d'après le th. 10, p. 90, un nombre M satisfaisant à 1^0, d'où $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k^0| \leqslant M \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \underset{1 \leqslant k < \infty}{\text{borne sup}} |\xi_k^0|$ et selon (20) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}$, donc, selon (10), $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$. Ceci établi, la thèse du lemme à démontrer résulte immédiatement du lemme 1.

Lemme 4. *Soit* x_0 *une suite sommable par une méthode* A *permanente et reversible. Si, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite* x *satisfaisant à la condition* (18), *la suite* x_0 *est sommable vers le*

même nombre par toute méthode B *permanente et pas plus faible de* A.

Démonstration. La reversibilité de A entraîne (voir Chap. III, § 6, th. 10, p. 47, et remarque p. 50) l'existence d'une suite $\{\alpha_i\}$ et d'un tableau $\{\beta_{ik}\}$ ayant les propriétés suivantes:

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_{ik}| < \infty \quad \textit{pour } k = 1, 2, \dots,$$

(22) *si l'on pose pour une suite convergente* $y = \{\eta_i\}$:

$$\xi_k = f_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{ik} \eta_i + \alpha_k \lim \eta_i \quad \textit{où} \quad k = 1, 2, \dots,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad \textit{pour } i = 1, 2, \dots$$

Les fonctionnelles $f_k(y)$ ainsi définies dans l'espace (c) sont linéaires. Pour toute suite convergente y la suite correspondante $x = \{\xi_k\}$ étant par hypothèse sommable par la méthode permanente B, chacune des séries $\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \xi_k$ est convergente et la suite de leurs sommes $\{B_i(x)\}$ l'est également.

Posons pour tout $y \subset (c)$:

$$F_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k(y) \quad \textit{pour } i = 1, 2, \dots \quad \textit{et} \quad F(y) = \lim_{i \to \infty} F_i(y).$$

Ainsi définies, les fonctionnelles $F_i(y)$ sont linéaires; en vertu du th. 4 (Chap. I §, 3), p. 23, il en est donc de même de la fonctionnelle $F(y)$.

Ceci établi, soient, conformément à l'hypothèse, x_0 la suite donnée et x une suite convergente satisfaisant à (18). En posant $y_0 = \{A_i(x_0)\}$ et $y = \{A_i(x)\}$, on a $y_0 \subset (c)$, $y \subset (c)$ et $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$, donc

$$(23) \qquad |B(x) - B(x_0)| = |F(y) - F(y_0)| \leqslant |F| \cdot \varepsilon$$

et, comme $A(x) = B(x)$, il vient $|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |A(x_0) -$

$- A(x)| + |B(x) - B(x_0)|$, d'où, selon (18) et (23), $|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant \leqslant |F| \cdot \varepsilon + \varepsilon$, ce qui entraîne l'égalité $A(x_0) = B(x_0)$, q. f. d.

Les lemmes 3 et 4 donnent le

Théorème 11. *Si la méthode permanente* B *n'est pas plus faible que la méthode permanente et reversible* A, *toute suite bornée sommable par* A *est aussi sommable par* B *vers le même nombre*[1]).

D'autre part les lemmes 2 et 4 donnent le

Théorème 12. *Si* A *est une méthode parfaite et* B *une méthode permanente pas plus faible de* A, *toute suite sommable par* A *est aussi sommable par* B *vers le même nombre*[2]).

[1]) Pour une classe spéciale de méthodes reversibles, à savoir des méthodes ainsi dites *normales*, ce théorème a été trouvé par M. S. Mazur (l. c., Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 599—611, Satz VII).

[2]) Pour les méthodes normales cf. S. Mazur, *Über eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren*, Stud. Math. II (1930), p. 40—50.

CHAPITRE VI.

Opérations totalement continues et associées.

§ 1. *Opérations totalement continues.*

Une opération linéaire $U(x)$ s'appelle *totalement continue,* si elle transforme tout ensemble borné en ensemble compact.

Exemple. Si, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, X_i désignent des fonctionnelles linéaires et x_i des éléments, l'opération $U(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \cdot x$ est totalement continue.

Théorème 1. *Le contredomaine de toute opération totalement continue est séparable.*

Démonstration. L'ensemble G_n de tous les $U(x)$ où $|x| \leqslant n$ étant compact, donc séparable[1], il en est de même de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$, qui est le contredomaine de l'opération U.

Théorème 2. *Etant donnée une suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires totalement continues, toute opération linéaire $U(x)$ telle que $\lim_{n\to\infty} |U_n - U| = 0$ est aussi totalement continue.*

Démonstration. Soient $\{x_i\}$ une suite bornée et $\{\overline{x}_i\}$ une suite extraite de $\{x_i\}$ par la méthode de la diagonale de façon que $\lim_{i\to\infty} U_n(\overline{x}_i)$ existe pour tout n naturel. On a en conséquence pour $n = 1, 2, \ldots$: $|U(\overline{x}_p) - U(\overline{x}_q)| \leqslant |U(\overline{x}_p) - U_n(\overline{x}_p)| + |U_n(\overline{x}_p) - U_n(\overline{x}_q)| + |U_n(\overline{x}_q) - U(\overline{x}_q)|$, donc $|U(\overline{x}_p) - U(\overline{x}_q)| \leqslant |U - U_n| \cdot (|\overline{x}_p| + |\overline{x}_q|) +$

[1]) cf. p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 126.

$+ |U_n(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_q)|$, d'où évidemment $\overline{\lim}_{q\to\infty,\, p\to\infty} |U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| = 0$. Ainsi la suite $\{U(\bar{x}_i)\}$ est convergente, ce qui implique la continuité totale de l'opération $U(x)$.

§ 2. *Exemples des opérations totalement continues dans quelques espaces particuliers.*

Si $K(s, t)$ est une fonction continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, la fonction (de la variable s)

$$u(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

est continue, quelle que soit la fonction intégrable $x(t)$. Regardée comme opération définie dans un des espaces

$$(M), (C), (L) \text{ et } (L^{(r)}) \text{ où } r > 1, \tag{2}$$

et dont le contredomaine est situé dans un quelconque de ces espaces, *l'opération* (1) *est totalement continue.*

La démonstration s'appuie sur le théorème suivant de Arzelà: *Pour qu'une suite de fonctions continues $\{u_n(s)\}$ renferme une suite partielle uniformément continue, il suffit qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|s_1 - s_2| < \eta$ entraîne l'inégalité $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$.*

Admettons en effet que $\|x_n(t)\| \leqslant 1$ et que l'on ait pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $n = 1, 2, \ldots$: $u_n(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x_n(t)\, dt$. La continuité de $K(s, t)$ implique l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ d'un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|s_1 - s_2| < \eta$ entraîne $|K(s_1, t) - K(s_2, t)| \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Par conséquent $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \leqslant \left|\int_0^1 [K(s_1, t) - K(s_2, t)]\, x_n(t)\, dt\right| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon \int_0^1 |x_n(t)|\, dt$, ce qui donne, en raison de l'inégalité $\int_0^1 |x_n(t)|\, dt \leqslant$ $\leqslant \|x_n\|$, facilement vérifiable dans les espaces (2), $|u_n(s_1) -$ $- u_n(s_2)| \leqslant \varepsilon$, de sorte qu'en vertu du théorème de Arzelà on

peut extraire de $\{u_n(s)\}$ une suite uniformément convergente. Or, toute suite de fonctions uniformément convergente étant dans les espaces (2) convergente en même temps suivant la norme (qui y a été adoptée), il est démontré que l'opération (1) y est totalement continue.

On a, en particulier, les théorémes suivants:

Espace (C). *Pour que l'opération* (1) *soit totalement continue dans* (C), *il suffit d'admettre que l'on a pour tout* s_0:

$$(3) \qquad \lim_{s \to s_0} \int_0^1 |K(s_0, t) - K(s, t)| \, dt = 0.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ on déduit facilement de (3) l'existence d'un $\eta > 0$ tel que $|s_1 - s_2| \leqslant \eta$ entraîne $\int_0^1 |K(s_1, t) - K(s_2, t)| \, dt \leqslant \varepsilon$, ce qui implique, comme auparavant, la continuité totale de l'opération (1) dans (C).

La condition (3) sera remplie p. ex., lorsque $K(s, t)$ est une fonction bornée et telle que l'on a $\lim_{s \to s_0} K(s, t) = K(s_0, t)$ pour tout s_0 et pour presque tout t.

Notons enfin que l'opération

$$v(s) = \int_0^s K(s, t) \, x(t) \, dt$$

est aussi totalement continue dans (C), si la condition (3) est remplie.

Espaces $(L^{(p)})$. $K(s, t)$ *étant une fonction mesurable pour* $0 \leqslant s \leqslant 1$ *et* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *et* r *désignant l'inférieur des nombres* p *et* $\frac{q}{q-1}$ *où* $p > 1$ *et* $q > 1$, *si l'on a*

$$(4) \qquad \int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{r}{r-1}} \, ds \, dt < \infty,$$

l'operation (1) *est totalement continue dans* $(L^{(p)})$ *et son contredomaine est situé dans* $(L^{(q)})$.

En effet, $\{K_n(s, t)\}$ étant une suite de fonctions continues, soit

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_n(s, t) - K(s, t)|^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt = 0.$$

L'opération $y = U_n(x) = \int_0^1 K_n(s, t)\, x(t)\, dt$ étant totalement continue pour $x \subset (L^{(p)})$ et $y \subset (L^{(q)})$, on a $\| U_n(x) - U(x) \|^q \leqslant \int_0^1 \left| \int_0^1 (K_n - K)\, x(t)\, dt \right|^q ds \leqslant \left\{ \int_0^1 ds \left[\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt \right]^{\frac{q(r-1)}{r}} \right\} \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^r dt \right)^{\frac{q}{r}}$.

Or, comme $r \leqslant p$, on a $\left(\int_0^1 |x(t)|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ et comme $r \leqslant \frac{q}{q-1}$, c. à d. $\frac{q(r-1)}{r} \leqslant 1$, on a $\| U_n(x) - U(x) \| \leqslant \left\{ \int_0^1\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\, ds \right\}^{\frac{r-1}{r}} \cdot \| x \|$, donc $\| U_n - U \| \leqslant \left[\int_0^1\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\, ds \right]^{\frac{r-1}{r}}$, d'où, selon (5), $\lim_{n\to\infty} \| U_n - U \| = 0$, ce qui implique en vertu du th. 2, p. 96, la continuité totale de U, c. à d. de l'opération (1), où $u(s) = U(x) \subset (L^{(q)})$.

Remarque. En particulier, pour $p = q = 2$ la condition $\int_0^1\int_0^1 K^2(s, t)\, ds\, dt < +\infty$ entraîne donc la continuité totale de l'opération (1) pour $x \subset (L^{(2)})$ et $u(s) \subset (L^{(2)})$.

§ 3. *Opérations conjuguées (associées).*

Soient, comme d'habitude, E et E_1 deux espaces du type (B) et $y = U(x)$ une opération linéaire définie dans E et dont le contredomaine est contenu dans E_1.

Convenons de désigner par X et Y des fonctionnelles linéaires définies respectivement dans E et E_1.

Considérons l'expression $Y[U(x)]$ où Y est une fonctionnelle quelconque définie dans E_1. Cette expression peut être regardée évidemment comme une fonctionnelle définie dans E. Posons notamment

$$X(x) = Y[U(x)]. \tag{6}$$

Ainsi définie, la fonctionnelle X est additive et continue, car on a $|X(x)| \leqslant |Y[U(x)]| \leqslant |Y| \cdot |U| \cdot |x|$, d'où

$$|X| \leqslant |Y| \cdot |U|. \tag{7}$$

Or, la relation (6) entre X et Y constitue une nouvelle opération

$$X = \overline{U}(Y),$$

dont le domaine est l'espace $\overline{E}_1$ des fonctionnelles linéaires définies dans E et dont le contredomaine est situé dans l'espace $\overline{E}$ de celles définies dans E.

L'opération $\overline{U}(Y)$ s'appelle *associée* à $U(x)$ (ou *conjuguée* avec $U(x)$). En vertu de (7), elle est additive et continue.

Théorème 3. *$\overline{U}(Y)$ étant une opération associée à l'opération linéaire $U(x)$, on a $|\overline{U}| = |U|$.*

Démonstration. On a d'une part pour tout $x \subset E$: $|Y[U(x)]| \leqslant \leqslant |Y| \cdot |U| \cdot |x|$, d'où $|\overline{U}(Y)| = |Y(U)| \leqslant |Y| \cdot |U|$ et par conséquent

$$|\overline{U}| \leqslant |U|. \tag{8}$$

D'autre part, étant donné un $x_0 \subset E$ arbitraire, il existe en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle linéaire Y_0 définie dans E_1 et telle que l'on a $|Y_0| = 1$ et $|Y_0[U(x_0)]| = |U(x_0)|$, donc $|U(x_0)| = |Y_0[U(x_0)]| \leqslant |\overline{U}| \cdot |Y_0| \cdot |x_0| = |\overline{U}| \cdot |x_0|$, d'où $|U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| \cdot |x_0|$ et par conséquent

$$|U| \leqslant |\overline{U}|. \tag{9}$$

Les inégalités (8) et (9) donnent l'égalité, q. f. d.

Théorème 4. *Si l'opération linéaire $U(x)$ est totalement continue, il en est de même de l'opération associée $\overline{U}(Y)$:* en d'autres

termes, si $|Y_n| < M$, il existe une suite $\{Y_{n_i}\}$ et une fonctionnelle X telles que

$$(10) \qquad \lim_{i\to\infty} |\overline{U}(Y_{n_i}) - X| = 0.$$

Démonstration. Le contredomaine $G \subset E_1$ de l'opération $U(x)$ contenant en vertu du th. 1, p. 96, un ensemble dénombrable dense, on peut selon le th. 3 (Chap. V, § 1), p. 79, extraire de la suite des fonctionnelles $\{Y_n\}$ où $|Y_n| < M$ une suite partielle $\{Y_{n_i}\}$ convergente pour tout $y \subset G$. Posons donc $\lim_{i\to\infty} Y_{n_i}[U(x)] = \lim_{i\to\infty} X_{n_i}(x) = X(x)$ et soit x_i un élément de E tel que l'on ait

$$(11) \qquad |x_i| = 1 \quad et \quad |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \geqslant \frac{1}{2}|X - X_{n_i}|.$$

Or, si le théorème n'était pas vrai, c. à d. s'il existait un nombre $\eta > 0$ tel que $|X - X_{n_i}| > \eta$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, on aurait d'après (11), en posant pour abréger $Y_i' = Y_{n_i}$:

$$(12) \qquad |Y_i'[U(x_i)] - \lim_{j\to\infty} Y_j'[U(x_i)]| \geqslant \frac{\eta}{2}$$

et (comme $|x_i| = 1$) il existerait une suite d'indices $\{k_i\}$ telle que $\lim_{i\to\infty} U(x_{k_i}) = y_0$. On trouverait donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, un N naturel tel que l'on ait pour tout $i > N$ les inégalités $|y_0 - U(x_{k_i})| < \varepsilon$ et $|Y'_{k_i}(y_0) - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}(y_0)| < \varepsilon$, d'où $|Y'_{k_i}[U(x_{k_i})] - \lim_{i\to\infty} Y'_{k_j}[U(x_{k_i})]| \leqslant$ $\leqslant |Y'_{k_i}[U(x_{k_i}) - y_0]| + |Y'_{k_i}(y_0) - \lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}(y_0)| + |\lim_{j\to\infty} Y'_{k_j}[U(x_{k_i}) - y_0]| \leqslant$ $\leqslant M \cdot \varepsilon + \varepsilon + M \cdot \varepsilon$, ce qui est impossible en vertu de (12), le nombre ε étant aussi petit que l'on veut.

§ **4.** *Applications. Exemples des opérations conjuguées dans quelques espaces particuliers.*

Espace (C). Si $K(s, t)$ est une fonction continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'expression

$$U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est une opération continue.

Soit $Y(y)$ où $y \subset (C)$ une fonctionnelle linéaire quelconque. Comme définie dans (C), elle est donc (cf. Chap. IV, § 4, p. 61) de la forme $Y(y) = \int_0^1 y(t)\, d\, Y(t)$, où $Y(t)$ est une fonction à variation bornée. La fonctionnelle $X(x) = Y[U(x)]$ est également linéaire dans (C), donc encore de la forme

$$X(x) = \int^1 x(t)\, d\, X(t), \tag{13}$$

où $X(t)$ est aussi une fonction à variation bornée (et nous pouvons admettre que $X(0) = 0$). En posant par conséquent

$$y(s) = U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{14}$$

on a pour toute fonction $x(t) \subset (C)$:

$$\int_0^1 x(s)\, d\, X(s) = \int_0^1 y(s)\, d\, Y(s). \tag{15}$$

Considérons la fonction

$$x_{v,n}(s) = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant v \\ 0 & \textit{pour} \quad v + \dfrac{1}{n} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

et qui soit linéaire pour $v \leqslant s \leqslant v + \frac{1}{n}$. Par substitution de $x_{v,n}(s)$ au lieu de $x(s)$ dans (14) et (15) on obtient $\int_0^1 x_{v,n}(s)\, dX(s) =$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(s, t)\, x_{v,n}(t)\, dt \right] d\, Y(s) = \int_0^1 x_{v,n}(t) \left[\int_0^1 K(s, t)\, d\, Y(s) \right] dt\, ^{1)},$$ d'où,

[1]) en vertu du théorème suivant sur la „commutativité de l'intégration" pour les intégrales multiples de Stieltjes d'une fonction continue:

par le passage à la limite avec $n \to \infty$, on a pour $s = 0,1$ et pour tout point s où la fonction $X(s)$ est continue, donc dans tout point de $[0, 1]$, sauf tout au plus une infinité dénombrable de points,

$$X(s) = \int_0^s \left[\int_0^1 K(s, t)\, d\, Y(s) \right] dt; \tag{16}$$

or, la valeur de l'intégrale de Stieltjes (13) restant la même, lorsqu'on modifie la valeur de la fonction $X(t)$ dans une infinité dénombrable de points (excepté 0 et 1), on peut admettre que la fonction $X(s)$ est définie par la formule (16) dans $[0, 1]$ tout entier, donc qu'elle est continue pour $0 \leqslant s \leqslant 1$.

L'expression (16) peut être considérée par conséquent comme représentation de l'opération associée $\overline{U}(Y) = X$. Il faut l'entendre dans ce sens que, $Y(s)$ étant une fonction à variation bornée qui représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 y(s)\, d\, Y(s)$, la fonction correspondante $X(s)$ à variation bornée représente la fonctionnelle linéaire $\int^1 x(t)\, d\, X(t)$.

Etant donnée une fonction $F(s, t)$ continue dans le carré $K = [0, 1;\ 0, 1]$ et deux fonctions $g(t)$ et $h(t)$ à variation bornée dans $[0, 1]$, on a $\iint_K F(s, t)\ dg(s)\ dh(t) =$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s, t)\, dg(s) \right] dh(t) = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s, t)\, dh(t) \right] dh(s).$$

La première de ces trois intégrales (l'intégrale double) est à entendre comme la limite des sommes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} F(s_i', t_j') [g(s_{i+1}) - g(s_i)]\, [h(t_{j+1}) - h(t_j)]$$

(où $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_i < \ldots < s_{m+1} = 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < \ldots < t_{n+1} = 1$, les points $s_i' \subset [s_i, s_{i+1}]$ et $t_j' \subset [t_j, t_{j+1}]$ étant arbitraires), lorsque la longueur des plus grands des segments $[s_i, s_{i+1}]$ et $[t_j, t_{j+1}]$ tend vers 0.

La démonstration du théorème en question coïncide avec celle du théorème analogue pour les intégrales de Riemann.

Pour l'opération linéaire

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

(avec la même fonction $K(s, t)$) on a

$$U(Y) = Y(t) - \int_0^t dt \int_0^1 K(s, t)\, d\, Y(s) = X(t).$$

Espaces $(L^{(p)})$. Si $K(s, t)$ est une fonction mesurable pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ et si l'on a

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)\, x(t)\, Y(s)| < \tag{17}$$

pour tout couple $x(t) \subset (L^{(p)})$ et $Y(s) \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ où $p > 1$ et $q > 1$, l'opération

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est linéaire pour $x \subset L^{(p)})$ et $y \subset (L^{(q)})$.

La fonctionnelle linéaire Y dans l'espace $(L^{(q)})$ est de la forme

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds,$$

où $Y(s)$ est une fonction. appartenant à $(L^{\frac{q}{q-1}})$ et on a

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, ds \cdot \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, dt \cdot \int_0^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds.$$

En posant

$$X(t) = \int_0^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds, \tag{18}$$

on a

$$\int^1 Y(s)\, y(s)\, ds = \int^1 X(t)\, x(t)\, dt.$$

L'expression (18) peut être considérée comme représentation de l'opération associée $\overline{U}(Y) = X$.

Dans le cas particulier où $p = q > 1$, l'opération associée à l'opération linéaire

$$U(x) = x(s) - \int K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est de la forme

$$X = \overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0 K(s, t)\, Y(s)\, ds.$$

Espace (L). Les considérations qui précèdent s'appliquent également à l'espace (L). Si l'on a la formule (17) pour $x \subset (L)$ et $Y \subset (M)$, l'expression

$$y = U(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

est une opération linéaire pour $x \subset (L)$ et $y \subset (L)$.

L'opération associée est de la forme

$$X = \overline{U}(Y) = \int^1 K(s, t)\, Y(s)\, ds$$

où $Y(s) \subset (M)$ représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds$ pour $y(s) \subset (L)$, tandis que $X(t) \subset (M)$ représente la fonctionnelle linéaire $\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt$ pour $x(t) \subset (L)$.

Pour un couple correspondant X, Y et x, y on a

$$\int^1 X(t)\, x(t)\, dt = \int^1 Y(s)\, y(s)\, ds.$$

CHAPITRE VII.

Suites biorthogonales.

§ 1. *Définition et propriétés générales.*

Une suite d'éléments $\{x_i\}$ et de fonctionnelles linéaires $\{f_i\}$ s'appelle *biorthogonale*, lorsque

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & pour \quad i = j, \\ 0 & pour \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Etant donné un $x \subset E$ arbitraire, la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x) \tag{2}$$

porte le nom du *développement de x suivant la suite biorthogonale* $\{x_i\}, \{f_i\}$.

Dans le cas où la suite $\{f_i\}$ constitue un ensemble total de fonctionnelles (cf. Chap. III, § 3, p. 42) et la série (2) est pour un x convergente, x est la somme de cette série; en effet, on a alors pour tout $j = 1, 2, \ldots$

$$f_j\left[x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)\right] = f_j(x) - f_j(x) = 0.$$

Théorème 1. *Si la série* (2) *est convergente pour tout* $x \subset E$, *la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$$

est aussi convergente pour tout $x \subset E$, *quelle que soit la fonctionnelle linéaire* F.

Démonstration. En posant

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot F(x_i), \tag{3}$$

on a $S_n(x) = \sum_{i=1} f_i(x) \cdot F(x_i) = F\left[\sum_{i=1} x_i \cdot f_i(x)\right]$, de sorte que la convergence de la suite $\{S_n(x)\}$ pour tout x est évidente.

Théorème 2. *Si les normes des sommes partielles* (3) *de la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) \tag{4}$$

sont bornées dans leur ensemble, quelle que soit la fonctionnelle linéaire F, *la série* (2) *est convergente pour tout* $x \subset E$ *qui est la limite d'une suite quelconque de combinaisons linéaires formées de termes de la suite* $\{x_i\}$.

Démonstration. En posant

$$s_n(x) = \sum_{i=1} x_i \cdot f_i(x), \tag{5}$$

on a $F[s_n(x)] = \sum_{i=1} F(x_i) \cdot f_i(x) = S_n(x)$ (voir (3)) et, comme par hypothèse $|S_n| \leqslant M$ où M est un nombre indépendant de n, on a pour tout $x \subset E$ en vertu du th. 6 (Chap. V, § 1), p. 80: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |s_n(x)| < \infty$. Il existe donc en vertu du th. 5 (Chap. V, § 1), p. 80, un nombre N, indépendant de n et de x, tel que $|s_n(x)| \leqslant N \cdot \|x\|$.

Or, comme pour tout $i = 1, 2, \ldots$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$, on établit par un raisonnement banal l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ pour tout élément $x \subset E$ qui satisfait à la condition de l'énoncé.

Théorème 3. *Si les normes des sommes partielles* (5) *de la série* (2) *sont bornées dans leur ensemble, quel que soit* $x \subset E$, *la*

série (4) *est convergente pour toute fonctionnelle F qui est la limite d'une suite quelconque de combinaisons linéaires formées de termes de la suite* $\{f_i\}$.

La démonstration est analogue à celle du th. 2, qui précède.

Théorème 4. *Dans les mêmes hypothèses, si en outre* $\{x_i\}$ *est une suite fondamentale, la série* (2) *est convergente pour tout* $x \subset E$.

Démonstration. On a, selon (5), $\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n(x)| < \infty$ pour tout $x \subset E$ et, de plus, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ La convergence de la série (2) pour tout $x \subset E$ en résulte en vertu des th. 5 et 3 (Chap. V, § 1), p. 80 et 79.

§ 2. *Suites biorthogonales dans quelques espaces particuliers.*

Envisageons à présent comment se comportent les suites biorthogonales dans les espaces qui nous intéressent plus particulièrement.

Posons

$$\int_0^1 x_i(t)\, y_j(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad i = j \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Admettons de plus que $\{x_i(t)\}$ soit une suite de fonctions dans $(L^{(p)})$ où $p > 1$ et $\{y_i(t)\}$ en soit une dans $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$; enfin que ces suites y soient complètes (ou fermées).

Théorème 5. *Dans ces hypothèses, si la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$$

est convergente en moyenne avec la p-ième puissance, quelle que soit la fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$, *la série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt \tag{7}$$

est convergente en moyenne avec la $\frac{p}{p-1}$ *-ième puissance pour toute fonction* $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Démonstration. Soit

$$f_i(x) = \int^1 y_i(t)\, x(t)\, dt \quad \text{pour } x(t) \subset (L^{(p)}).$$

La série $\sum_{i=1} x_i \cdot f_i(x)$ est donc par hypothèse pour tout $x \subset (L^{(p)})$ convergente en moyenne (c. à d. selon la norme) avec la p-ième puissance. En vertu du th. 3, p. 107, la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \; F(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt$ où $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ est par conséquent avec la $\frac{p}{p-1}$ ième puissance convergente selon la norme (c. à d. en moyenne) pour toute fonctionnelle linéaire F définie dans l'espace $(L^{(p)})$; il en est donc de même de la série (7) pour toute fonction $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, c. q. f. d.

En particulier, lorsque $x_i(t) = y_i(t) \subset (L^{(r)})$ où r est le plus grand des nombres p et $\frac{p}{p-1}$, le théorème qui vient d'être établi entraîne le corollaire suivant.

Si la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int x_i(t)\, x(t)\, dt \tag{8}$$

est pour tout $x \subset (L^{(p)})$ *convergente en moyenne avec la p-ième puissance, elle l'est également pour tout* $x \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ *avec la* $\frac{p}{p-1}$*-ième puissance.*

On peut y admettre p. ex. que x_i où $i = 1, 2, \ldots$ sont des fonctions bornées.

Considérons maintenant le cas où, dans l'hypothése (6), $\{x_i(t)\}$ est une suite de fonctions intégrables et $\{y_i(t)\}$ une suite

de fonctions bornées pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Admettons enfin que la suite $\{x_i(t)\}$ soit complète dans (L).

Théorème 6. *Dans ces hypothèses, si la série* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$ *est convergente en moyenne pour tout* $x(t) \subset (L)$, *la série* $\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt$ *est bornée presque partout pour tout* $x(t) \subset (M)$ *et réciproquement.*

Le démonstration est analogue à celle du th. 5, qui précède: on considère x_i comme des éléments du domaine (L) et y_i comme des représentants des fonctionnelles linéaires; on a recours enfin aux th. 3 et 4, p. 107—108.

En particulier, lorsque $x_i(t) = y_i(t)$, on a les corollaires:

1° *Si la série* (8), *où* $x_i(t) = y_i(t) \subset (M)$, *est convergente en moyenne pour tout* $x(t) \subset (L)$, *elle est bornée pour tout* $x(t) \subset (M)$ *et réciproquement.*

2° *Si la série* (8), *où* $x_i(t) = y_i(t) \subset (C)$ *et* $\{x_i\}$ *est une suite complète dans* (C), *est uniformément convergente pour tout* $x(t) \subset (C)$, *elle est convergente en moyenne pour tout* $x(t) \subset (L)$ *et réciproquement.*

La démonstration s'obtient: dans un sens, en considérant x_i comme des éléments du domaine (C) et $y_i = x_i$ comme des représentants des fonctionnelles, et, dans le sens inverse, en regardant $x_i(t)$ comme des éléments du domaine (L) et $y_i = x_i$ comme des représentants des fonctionnelles linéaires définies dans (L).

§ 3. *Bases dans les espaces du type (B).*

Une suite $\{x_i\}$ d'éléments de E s'appelle *base*[1]), lorsqu'il existe pour tout $x \subset E$ exactement une suite de nombres $\{\eta_i\}$ telle que l'on ait

[1]) Cette notion a été introduite dans le cas général par M. J. Schauder *(Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 47—65).

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i .$$

Etant donnée une base $\{x_i\}$, soit E_1 l'ensemble des suites $y = \{\eta_i\}$ pour lesquelles la série $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$ est convergente. En posant $|y| = \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \right|$, on montre facilement que E_1 ainsi normé constitue un espace du type (B).

Posons ensuite

$$x = U(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \quad \textit{pour toute suite} \quad y = \{\eta_i\} \subset E_1 .$$

Ainsi définie, l'opération $U(y)$ est linéaire, car $|U(y)| \leqslant |y|$, est comme elle transforme E_1 en E d'une façon biunivoque, l'opération inverse $y = U^{-1}(x)$ est également linéaire.

Enfin la fonctionnelle

$$f_i(x) = \eta_i \quad où \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

est aussi linéaire, car $|\eta_i x_i| \leqslant 2 \cdot |y|$ et $|f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \frac{2}{|x_i|} |y| \leqslant \frac{2}{|x_i|} |U^{-1}| \cdot |x|$.

Or, on a par conséquent

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E$$

et, ce développement étant unique, on obtient l'égalité (1) (voir p. 106), de sorte que *la suite* $\{x_i\}, \{f_i\}$ *est biorthogonale.*

Remarquons que pour toute fonctionnelle linéaire F définie dans E la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$ converge vers $F(x)$, car on a pour tout $x \subset E$: $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i) = \lim_{n \to \infty} F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x)\right] = F(x)$.

On ne sait pas si tout espace du type (B) séparable admet une base.

La question n'est résolue que pour certains espaces particuliers. Ainsi p. ex. dans $(L^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ la base est donnée par le système orthogonal de Haar. Dans (C) la base a été construite par M. J. Schauder[1]. Dans $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ la base est fournie par la suite $\{x_i\}$ où $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$ et $\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & pour \quad i = n \\ 0 & pour \quad i \neq n; \end{cases}$ on a alors $f_i(x) = \xi_i$ pour $x = \{\xi_i\}$. Enfin dans (c) la base est formée de la même suite augmentée de l'élément $x_0 = \{\xi_n^{(0)}\}$ où $\xi_n^{(0)} = 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On a alors $f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i$ pour $x = \{\xi_i\} \subset (c)$.

§ 4. *Quelques applications à la théorie des développements orthogonaux.*

Théorème 7. *Les suites $\{x_i\}, \{f_i\}$ et $\{y_i\}, \{\varphi_i\}$ étant biorthogonales et les équations $f_i(x) = \varphi_i(y)$ où $i = 1, 2, \ldots$ admettant pour tout x exactement une seule solution $y = U(x)$, la convergence de la série $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i$ entraîne celle de la série $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i$ pour toute suite de nombres $\{h_i\}$.*

Démonstration. On aperçoit facilement que les égalités $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ où $y_n = U(x_n)$ entraînent l'égalité $y_0 = U(x_0)$. En vertu du th. 7 (Chap. III, § 3), p. 41, l'opération $y = U(x)$ est par conséquent linéaire. En posant donc $\|U\| = M$, on a $\|U(x)\| \leqslant M \cdot \|x\|$ et comme par définition $U(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$, il vient $U\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i$ pour h_i réels quelconques, ce qui implique immédiatement la thèse du théorème.

Corollaire. *$\{x_i(t)\}$ et $\{y_i(t)\}$ étant des suites orthogonales normées de fonctions continues, si pour toute fonction continue $x(t)$ il existe une fonction continue unique $y(t)$ telle que l'on ait $\int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 y_i(t)\, y(t)\, dt$, la convergence uniforme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i(t)$ entraîne celle de la série $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i(t)$.*

[1] l. c., Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 48—49.

Des corollaires analogues s'obtiennent pour d'autres espaces fonctionnels [1]).

Théorème 8. *Soient:* $\{x_i\}, \{f_i\}$ *une suite biorthogonale, où* $\{f_i\}$ *est une suite totale, et* $\{h_i\}$ *une suite de nombres telle que,* $\{\alpha_i\}$ *étant une suite de coefficients d'un élément* x (c. à d. que $\alpha_i = f_i(x)$ pour $i = 1, 2, \ldots$), $\{h_i \alpha_i\}$ *en soit une d'un élément* y.

Si dans ces conditions $\{\beta_i\}$ *est une suite de coefficients d'une fonctionnelle linéaire* F (c. à d. que $\beta_i = F(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$), *la suite* $\{h_i \beta_i\}$ *l'est d'une fonctionnelle linéaire* Φ.

Démonstration. Le système d'équations $f_i(x) = h_i f_i(y)$ où $i = 1, 2, \ldots$ admet par hypothèse pour tout x exactement une solution. Désignons la par $y = U(x)$.

Les égalités $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ où $y_n = U(x_n)$ entraînent évidemment l'égalité $y_0 = U(x_0)$. Par conséquent, en vertu du th. 7 (Chap. III, § 3), p. 41, l'opération $U(x)$ est continue. En particulier, on vérifie aisément que l'on a

$$(9) \qquad U(x_i) = h_i x_i \quad \textit{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Or, étant donnée une fonctionnelle linéaire F telle que $\beta_i = F(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$, on a selon (9) $F[U(x_i)] = h_i F(x_i) = h_i \beta_i$, c. à d. que les nombres $h_i \beta_i$ sont des coefficients de l'opération $\Phi = \overline{U}(F)$, c. q. f. d.

Remarquons que si $x = \lim_{i\to\infty} x_i$, $U(x)$ est en vertu de (9) la limite d'une combinaison linéaire de termes de la suite $\{x_i\}$.

Comme une application facile de cette remarque, nous obtenons le

Théorème 9. *Soit* $\{x_i(t)\}$ *une suite orthogonale et normée de fonctions continues, fermée dans l'espace* (C).

[1]) Cf. S. Banach, *Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales,* Comptes Rendus 180, Paris 1925, p. 1637—1640 et H. Steinhaus, *Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie des séries orthogonales,* Stud. Math. 1 (1929), p. 191—200.

Si la suite de facteurs $\{h_i\}$ *transforme toute suite* $\{\alpha_i\}$ *de coefficients d'une fonction bornée en une suite* $\{h_i\alpha_i\}$ *de ceux d'une fonction bornée, elle transforme en même temps toute suite* $\{\beta_i\}$ *de coefficients d'une fonction continue arbitraire en une suite* $\{h_i\beta_i\}$ *de coefficients d'une fonction continue.*

Le théorème inverse est aussi vrai.

On a enfin le

Théorème 10. *Soit* $\{x_i(t)\}$ *une suite de fonctions bornées orthogonale, normale et complète dans* $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ *où* $p > 1$.

Si la suite de facteurs $\{h_i\}$ *transforme la suite de coefficients* $\{\alpha_i\}$ *d'une fonction arbitraire* $x(t) \subset (L^{(p)})$ *dans la suite* $\{h_i\alpha_i\}$ *de ceux d'une fonction* $y(t) \subset (L^{(p)})$, *elle transforme aussi toute suite* $\{\beta_i\}$ *de coefficients d'une fonction arbitraire* $\bar{x}(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ *dans la suite* $\{h_i\beta_i\}$ *de ceux d'une fonction* $\bar{y}(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$. *Si* $p = \infty$, *alors* $(L^{(p)}) = (M)$ [1].

[1]) Cf. W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* Stud. Math. I (1929), p. 1—39 et 241—255.

CHAPITRE VIII.

Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type *(B)*.

§ 1. *Préliminaires.*

Etant donné un espace vectoriel fermé *d'éléments* $G \subset E$ et l'espace $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe, comme nous avons vu (cf. Chap. IV, § 3, p. 57, lemme), pour un *élément* quelconque $x_0 \subset E - G$ *une fonctionnelle linéaire* $f \subset \overline{E}$ telle que l'on a

$$f(x_0) = 1 \quad \textit{et} \quad f(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \subset G.$$

Le problème s'impose si, réciproquement, la relation analogue ne subsiste entre les espaces $\Gamma \subset \overline{E}$ de fonctionnelles linéaires et les éléments de E. Plus précisément, il s'agit de savoir si, étant donné un espace vectoriel fermé $\Gamma \subset \overline{E}$ de *fonctionnelles linéaires* définies dans E, il existe pour une *fonctionnelle* quelconque $f_0 \subset E - \Gamma$ un *élément* $x \subset E$ tel que l'on ait

$$(1) \qquad f_0(x) = 1 \quad \textit{et} \quad f(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma.$$

Or, *la réponse est*, dans le cas général, *négative*.

Considérons, en effet, comme E l'espace (c) des suites convergentes de nombres réels, donc comme $\overline{E}$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c), et comme Γ celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c) de la forme:

$$(2) \quad f(x) = \sum \alpha_i \xi_i \quad \textit{où} \quad x = \{\xi_i\} \subset (c) \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1} |\alpha_i| < \infty.$$

Ainsi défini, Γ est un espace vectoriel et fermé.

En effet, posons

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0,$$

où

$$(4) \qquad f_n \subset \Gamma \quad et \quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \xi_i \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots$$

Il s'agit de montrer que $f \subset \Gamma$. Or, (2) entraîne $\lim\limits_{p\to\infty,\, q\to\infty} \| f_p - f_q \| = 0$, d'où, comme par définition $f_p(x) - f_q(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)}) \xi_i$, on conclut de (3) en vertu du th. (Chap. IV, § 4), p. 66, que $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{\infty} | \alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)} | = 0$ et, par conséquent, qu'il existe une suite $\{\alpha_i\}$ telle que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} | \alpha_i^{(n)} - \alpha_i | = 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$. On a donc pour tout $x = \{\xi_i\} \subset (c)$ l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \xi_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, d'où, selon (4), $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ et comme selon (3) $\lim\limits_{n\to\infty} | f_n(x) - f(x) | \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| \cdot | x | = 0$, il vient $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ pour tout $x \subset (c)$. La fonctionnelle f est donc de la forme (2), d'où finalement $f \subset \Gamma$.

Ceci établi, soit

$$(5) \qquad f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i \quad pour \quad x = \{\xi_i\} \subset (c).$$

La fonctionnelle f_0 ainsi définie n'appartient évidemment pas à Γ. Cependant il n'existe aucun $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \subset (c)$ satisfaisant aux conditions (1), car (1) et (5) entraînant l'égalité $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^{(0)} = 1$, il est impossible d'avoir pour toute suite de nombres $\{\alpha_i\}$ satisfaisant aux conditions (2) l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^{(0)} = 0$ exigée par (1).

§ 2. *Ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires.*

Un ensemble vectoriel Γ de fonctionnelles linéaires définies dans un espace E du type (B) s'appelle *régulièrement fermé*, lors-

qu'il existe pour toute fonctionnelle linéaire définie dans E, mais n'appartenant pas à Γ, un élément $x_0 \subset E$ qui remplisse les conditions (1).

L'exemple qui précède montre que l'ensemble vectoriel fermé de fonctionnelles linéaires n'est pas toujours régulièrement fermé. Or, la réciproque est vraie: tout ensemble vectoriel de fonctionnelles linéaires Γ qui est régulièrement fermé est en même temps fermé dans le sens ordinaire (v. Introduction, p. 13) de ce terme.

En effet, soit

$$f_n \subset \Gamma \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f_0 \| = 0. \tag{7}$$

Si dans ces conditions f_0 n'appartenait pas à l'ensemble Γ, supposé vectoriel et régulièrement fermé, il existerait un $x_0 \subset E$ satisfaisant à (1); d'après (6) on aurait donc en particulier $f_n(x_0) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, d'où, selon (7), $f_0(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = 0$, contrairement à (1). On doit donc admettre que $f_0 \subset \Gamma$, c. à d. que l'ensemble Γ est fermé.

Il est facile de donner des exemples d'ensembles régulièrement fermés. Soit, en effet, E un espace du type (B) et $G \subset E$ un ensemble vectoriel, d'ailleurs arbitraire. L'ensemble Γ des fonctionnelles linéaires f définies dans E et telles que

$$f(x) = 0 \quad pour\ tout \quad x \subset G$$

est, comme on l'aperçoit aisément, régulièrement fermé.

Remarque. Si l'ensemble Γ en question est non seulement vectoriel et régulièrement fermé, mais en outre total, il contient toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E.

En effet, la définition de l'ensemble total (voir Chap. III, § 3, p. 42) implique que le seul élément de E pour lequel toutes les fonctionnelles $f \subset \Gamma$ s'annulent est l'élément Θ.

Nous allons nous occuper dans ce chapitre des propriétés

que possèdent les ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires [1]).

§ 3. *Ensembles transfiniment fermés de fonctionnelles linéaires.*

Etant donnés un nombre ordinal quelconque ϑ qui est un *nombre-limite*, c. à d. n'ayant pas de précédent immédiat, et une suite bornée de nombres réels $\{C_\xi\}$ *du type* ϑ, c. à d. où $1 \leqslant \xi < \vartheta$, on appelle *limite transfinie supérieure de* $\{C_\xi\}$ et on désigne par $\overline{\lim\limits_{\xi\to\infty}} C_\xi$ la borne inférieure des nombres réels t satisfaisant à l'inégalité $C_\xi \leqslant t$ à partir d'un indice (ordinal) qui dépend de t. La *limite transfinie inférieure de* $\{C_\xi\}$ est ensuite définie par la formule

$$\underline{\lim_{\xi\to\vartheta}} C_\xi = -\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} (-C_\xi).$$

Lemme 1. *Si l'on a pour une suite* $\{f_\xi\}$ *du type* ϑ *de fonctionnelles linéaires*

$$|f| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant \xi < \vartheta,$$

il existe une fonctionnelle linéaire f remplissant les conditions:

$$(8) \quad |f| \leqslant M \quad \textit{et} \quad \underline{\lim_{\xi\to\vartheta}} f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} f_\xi(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E.$$

La démonstration résulte du th. 1 (Chap. II, § 2), p. 27, en y posant $p(x) = \overline{\lim\limits_{\xi\to\vartheta}} f_\xi(x)$. La fonctionnelle $p(x)$ satisfait en outre à l'inégalité $p(x) \leqslant M \cdot |x|$.

Ce lemme établi, nous appellerons une fonctionnelle linéaire $f(x)$ remplissant les conditions (8) *limite transfinie de la suite* $\{f_\xi(x)\}$.

En particulier, lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = 0$, la fonctionnelle $f(x)$ est évidemment une limite transfinie de la suite $\{f_n(x)\}$, car on a $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) = f(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ pour tout $x \subset E$.

[1]) Cf. S. Banach, l. c., Studia Mathematica I, p. 228—234, où se trouvent les théorèmes des §§ 3—5 de ce chapitre.

Un espace vectoriel Γ de fonctionnelles linéaires est dit *transfiniment fermé*, lorsque toute suite transfinie $\{f_\xi\}$ de fonctionnelles de Γ à normes bornées dans leur ensemble admet une limite transfinie $f \subset \Gamma$.

Tout espace Γ transfiniment fermé est en même temps fermé au sens ordinaire.

En effet, les formules (6) et (7) donnent alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ pour tout $x \subset E$ et comme toute fonctionnelle f qui satisfait à la condition $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ est dans ce cas identique avec la fonctionnelle f_0, cette dernière, comme la seule limite transfinie de la suite $\{f_n\}$, appartient à l'espace Γ, qui est par conséquent fermé.

Lemme 2. *Etant donnés un espace vectoriel et transfiniment fermé Γ de fonctionnelles linéaires (définies dans E) et une fonctionnelle linéaire f_0 n'appartenant pas à Γ, il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition*

$$(9) \qquad 0 < M < |f - f_0| \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma$$

un élément $x_0 \subset E$ tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma \quad \textit{et} \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

Démonstration. $\{M_i\}$ où $M_1 = M$ étant une suite infiniment croissante quelconque de nombres, désignons par $\mathfrak{m}$ le plus grand nombre cardinal satisfaisant à la condition suivante: étant donné un ensemble quelconque $G \subset E$ de puissance $< \mathfrak{m}$, il existe une fonctionnelle linéaire $f \subset \Gamma$ telle que

$$(10) \quad |f| \leqslant M_2 \quad \textit{et} \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x| \quad \textit{pour tout} \quad x \subset G.$$

Le nombre $\mathfrak{m}$ ainsi défini—remarquons le de suite—ne dépasse pas la puissance de E, car, s'il existait un $f \subset \Gamma$ tel que $|f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x|$ pour tout $x \subset E$, on aurait $|f - f_0| \leqslant M_1 = M$, contrairement à l'hypothèse (9).

Ceci dit, nous allons montrer que $\mathfrak{m}$ *est un nombre fini.*

Supposons, en effet, que $\mathfrak{m}$ ne soit pas fini et considérons un ensemble quelconque $G \subset E$ de puissance $\mathfrak{m}$. Rangeons les éléments de G en suite transfinie $\{x_\xi\}$ où $1 \leqslant \xi < \vartheta$, en désignant par ϑ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$; évidemment ϑ est un nombre-limite. En consequence; pour tout nombre ordinal $\eta < \vartheta$ la puissance de l'ensemble des termes de la suite $\{x_\xi\}$ où $1 \leqslant \xi < \eta$ est $< \mathfrak{m}$. Par définition de $\mathfrak{m}$ il existe donc pour tout $\eta < \vartheta$ une fonctionnelle linéaire $f_\eta \subset \Gamma$ telle que

$$(11) \quad |f_\eta| \leqslant M_2 \quad et \quad |f_\eta(x_\xi) - f_0(x_\xi)| \leqslant M_1 \cdot |x_\xi| \quad pour\ tout \quad \xi \leqslant \eta$$

et, Γ étant par hypothèse transfiniment fermé, il existe une fonctionnelle linéaire $f \subset \Gamma$ qui est une limite transfinie de la suite $\{f_\eta\}$ où $1 \leqslant \eta < \vartheta$, donc, d'après (11), qui satisfait aux conditions $|f| \leqslant M_2$ et $|f(x_\xi) - f_0(x_\xi)| \leqslant M_1 \cdot |x_\xi|$ pour $1 \leqslant \xi < \vartheta$, c. à d. aux conditions (10). Ainsi, en supposant $\mathfrak{m}$ non fini, il existerait pour tout ensemble $G \subset E$ de puissance $\mathfrak{m}$ un $f \subset \Gamma$ satisfaisant à (10), contrairement à la définition de $\mathfrak{m}$.

Or, $\mathfrak{m}$ étant fini, il existe un ensemble fini $G_1 \subset E$ tel qu'aucune fonctionnelle f assujettie aux conditions

$$|f - f_0| \leqslant M_2 \quad et \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x| \quad pour\ tout \quad x \subset G_1$$

n'appartient à Γ.

On en déduit aisément par induction l'existence dans E d'une suite $\{G_i\}$ d'ensembles finis tels qu'aucune fonctionnelle f qui, pour un certain k, remplit les conditions

$$|f - f_0| \leqslant M_k \quad et \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_i \cdot |x| \quad pour \quad x \subset G_i \quad et \quad i < k$$

n'appartient à Γ. Par conséquent, si l'on a pour un f:

$$(12) \quad |f(x) - f_0(x)| \leqslant M_i \cdot |x| \quad pour \quad x \subset G_i \quad et \quad i = 1, 2, \dots,$$

la fonctionnelle f n'appartient pas à Γ.

Nous pouvons admettre que les éléments des ensembles G_i où $i = 1, 2, \dots$ ont les normes égales à $\frac{M_1}{M_i}$: il suffit à ce but de

multiplier ces éléments par des nombres convenables. Si l'on range ensuite les éléments de ces ensembles en une suite $\{x_n\}$, en écrivant d'abord ceux de G_1, puis ceux de G_2 et ainsi de suite on obtient

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \Theta \quad \textit{et} \quad |x_n| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots$$

et si

$$(14) \qquad |f(x_n) - f_0(x_n)| \leqslant M_1 \quad \textit{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

la fonctionnelle f n'appartient pas à Γ.

Désignons par G_0 l'ensemble de toutes les suites $\{f(x_n)\}$ pour $f \subset \Gamma$. On a évidemment $G_0 \subset (c)$ et $\{f_0(x_n)\} \subset (c)$. En vertu de (14), la distance de $\{f_0(x_n)\}$ à l'ensemble linéaire G_0 est $\geqslant M_1$. Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (c) (cf. Chap. IV, § 4, p. 66), il existe donc en vertu du lemme (Chap. IV, § 3), p. 57 (en y posant $G = G_0$), une suite de nombres $\{C_n\}$ et un nombre C tels que l'on a

$$(15) \qquad C \lim_{n\to\infty} f_0(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_0(x_n) = 1,$$

$$(16) \qquad C \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(x_n) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma$$

et

$$(17) \qquad |C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant \frac{1}{M_1}.$$

En posant donc $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$, on obtient finalement de (15)—(17), en vertu de (13), $f_0(x_0) = 1$, $f(x_0) = 0$ pour tout $f \subset \Gamma$ et $|x_0| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \cdot |x_n| \leqslant \frac{1}{M_1} = \frac{1}{M}$, c. q. f. d.

Le lemme 2 qui vient d'être établi implique le suivant

Lemme 3. *Les notions d'espaces vectoriels de fonctionnelles linéaires régulièrement fermés et de ceux trasfiniment fermés sont équivalentes.*

Démonstration. Si un espace vectoriel Γ de fonctionnelles linéaires est transfiniment fermé, il est fermé au sens ordinaire, ce qui implique immédiatement en vertu du lemme 2 que Γ est un espace régulièrement fermé.

Réciproquement, soient Γ un espace vectoriel régulièrement fermé de fonctionnelles linéaires, $\{f_\xi\}$ une suite arbitraire du type ϑ de fonctionnelles appartenant à Γ et dont les normes sont bornées dans leur ensemble, enfin f_0 une fonctionnelle quelconque qui est une limite transfinie de la suite $\{f_\xi\}$. On a donc

$$(18) \qquad \varliminf_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \varlimsup_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E.$$

Si en conséquence f_0 n'appartenait pas à Γ, il existerait par définition de Γ un élément $x \subset E$ assujetti aux conditions (1), p. 115, d'où, en particulier, $f_\xi(x) = 0$, contrairement à (18). On a donc $f_0 \subset \Gamma$, de sorte que Γ est transfiniment fermé.

Les lemmes 2 et 3 donnent le

Théorème 1. *Etant donné un espace vectoriel régulièrement fermé Γ de fonctionnelles linéaires (définies dans E) et une fonctionnelle linéaire f_0 n'appartenant pas à Γ, il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition*

$$0 < M < |f - f_0| \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma$$

un élément $x_0 \subset E$ tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1, \; f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma \quad \textit{et} \qquad\qquad < \frac{1}{M}.$$

§ 4. *Convergence faible des fonctionnelles linéaires.*

On dit qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctionnelles linéaires converge *faiblement* vers la fonctionnelle f, lorsqu'on a

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E.$$

La fonctionnelle f porte alors le nom de *limite faible* de la suite $\{f_n\}$.

La fonctionnelle $f(x)$ est donc additive et mesurable (B); selon le th. 4 (Chap. I, § 3), p. 23, elle est donc linéaire. D'autre part, en vertu du th. 5 (Chap. V, § 1), p. 80, la suite des normes $\{\|f_n\|\}$ est bornée. Enfin, on a

$$(19) \qquad \|f\| \leqslant \underline{\lim} \|f_n\|,$$

car la convergence faible de la suite $\{f_n\}$ vers f entraîne $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$ pour tout x, et comme $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x\|$ pour $n = 1, 2, \dots$, on a $|f(x)| \leqslant \|x\| \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|$, d'où la formule (19).

On en déduit aisément le

Théorème 2. *Pour qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctionnelles linéaires converge faiblement vers la fonctionnelle $f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

(20) *la suite $\{\|f_n\|\}$ bornée*

et

(21) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *pour tout élément x d'un ensemble dense (ou fondamental).*

Théorème 3. *Si l'espace E est séparable, toute suite de fonctionnelles linéaires $\{f_n\}$ dont l'ensemble des normes est borné contient une suite partielle faiblement convergente.*

Démonstration. Il suffit, en effet, d'extraire de la suite $\{f_n\}$ une suite partielle, convergente dans un ensemble dense dénombrable, ce qui est facile de faire par le procédé de la diagonale.

§ 5. *Ensembles faiblement fermés de fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B) séparables.*

Etant donnés deux ensembles de fonctionnelles linéaires Δ et Γ où $\Delta \subset \Gamma$, l'ensemble Δ est dit *faiblement dense* dans Γ, lorsque pour tout $f \subset \Gamma$ il existe dans Δ une suite $\{f_n\}$ qui converge faiblement vers f.

L'ensemble Γ de fonctionnelles linéaires s'appelle *faiblement fermé*, lorsque Γ admet comme élément toute fonctionnelle f qui est la limite faible d'une suite de fonctionnelles appartenant à Γ.

Théorème 4. *Si l'espace E est séparable, tout ensemble Γ de fonctionnelles linéaires définies dans E contient un sous-ensemble dénombrable Δ faiblement dense dans Γ.*

Démonstration. On peut se borner au cas où les normes des fonctionnelles de Γ sont bornées dans leur ensemble, car tout ensemble de fonctionnelles est une somme tout au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles ayant cette propriété.

Soient $\{x_n\}$ la suite dense dans E et Z_n pour $n = 1, 2, \dots$ l'ensemble des points de l'espace n-dimensionnel à coordonnées

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \tag{22}$$

pour tous les $f \subset \Gamma$. Il existe évidemment pour tout n un ensemble dénombrable $\Delta_n \subset \Gamma$ tel que les points à coordonnées (22) pour $f \subset \Delta_n$ forment un ensemble dense dans Z_n. L'ensemble $\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ est évidemment dénombrable et il existe pour tout $f \subset \Gamma$ une suite $\{f_n\}$ satisfaisant aux conditions $f_n \subset \Delta_n \subset \Delta$ et $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, donc qui converge faiblement vers f, puisque, les fonctionnelles f_n appartenant à $\Delta \subset \Gamma$, l'ensemble de leurs normes est borné par hypothèse.

Théorème 5. *Pour les espaces E du type (B) séparables les notions d'ensembles de fonctions linéaires (définies dans E) régulièrement fermé et faiblement fermé sont équivalentes.*

Démonstration. Soit, d'une part, $\{f_n\}$ une suite de fonctionnelles linéaires appartenant à Γ et qui converge faiblement vers une fonctionnelle f_0. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E. \tag{23}$$

Si f_0 n'appartenait pas à l'ensemble Γ, supposé régulièrement

fermé, il existerait par définition de cette notion un élément $x_0 \subset E$ satisfaisant aux conditions

$$(24) \qquad f_0(x_0) = 1 \quad et \quad f(x_0) = 0 \quad pour\ tout \quad f \subset \Gamma.$$

Comme $f_n \subset \Gamma$, on aurait par conséquent $f_n(x_0) = 0$ pour tout $n = 1, 2, \dots$, d'où, en vertu de (23), $f_0(x_0) = 0$, contrairement à (24). Il en résulte que $f_0 \subset \Gamma$; l'ensemble Γ est donc faiblement fermé [1].

D'autre part, en vertu du lemme 3, p. 121, il suffit de montrer que l'ensemble Γ, supposé faiblement fermé, est transfiniment fermé.

Soient $\{f_\xi\}$ une suite du type ϑ telle que

$$(25) \qquad f_\xi \subset \Gamma \quad et \quad |f_\xi| \leqslant M \quad où \quad 1 \leqslant \xi < \vartheta$$

et $\{x_i\}$ une suite dense dans E. Il existe, en raison de l'hypothèse, pour tout n naturel un ξ_n ordinal tel que

$$(26) \qquad \underline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) + \frac{1}{n} \quad pour \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Or, l'espace E étant séparable, on peut en vertu du th. 3, p. 123, extraire de la suite $\{f_{\xi_n}\}$ une suite partielle faiblement convergente. En désignant par f la limite faible de la suite $\{f_{\xi_n}\}$, on a en vertu de (25) $f \subset \Gamma$ et, en même temps, on conclut de (26) que f est une limite transfinie de la suite $\{f_\xi\}$.

Les théorèmes 1, p. 122, et 5, qui vient d'être établi, entraînent immédiatement le

Théorème 6. *Si l'espace E du type (B) est séparable, alors étant donné un ensemble vectoriel faiblement fermé Γ de fonctionnelles linéaires définies dans E et une fonctionnelle linéaire quelconque f_0 n'appartenant pas à Γ, il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition*

$$0 < M < |f - f_0| \quad pour\ tout \quad f \subset \Gamma$$

[1]) On voit donc que la séparabilité de E n'intervient pas dans cette partie de la démonstration.

un élément $x_0 \subset E$ *tel que l'on a*

$$f_0(x_0) = 1, \; f(x_0) = 0 \quad pour\ tout \quad f \subset \Gamma \quad et \quad |x_0| < \frac{1}{M}.$$

Le th. 5 entraîne en vertu du lemme 3, p. 121, *l'équivalence des notions d'ensembles régulièrement, transfiniment et faiblement fermés* de fonctionnelles linéaires *dans les espaces E* du type (*B*) *séparables.*

Il en résulte, en tenant compte de la remarque, p. 117, le

Théorème 7. *Si l'espace E du type (B) est séparable et Γ est un ensemble de fonctionnelles linéaires définies dans E, non seulement vectoriel et faiblement fermé, mais aussi total, alors Γ contient toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E* (c. à d. $\Gamma = \overline{\overline{E}}$).

§ **6.** *Conditions pour la convergence faible des fonctionnelles linéaires définies dans les espaces* (C), ($L^{(p)}$), (c) *et* ($l^{(p)}$).

Nous passons à étudier successivement la convergence faible des fonctionnelles linéaires dans quelques espaces particuliers du type (*B*) *séparables.* Tels sont les espaces (C), ($L^{(p)}$) pour $p \geqslant 1$, (c) et ($l^{(p)}$) pour $p \geqslant 1$.

L'ensemble dense dénombrable constituent: dans (C) et ($L^{(p)}$) les polynômes à coefficients rationnels, dans (c), resp. dans ($l^{(p)}$), les suites de nombres rationnels dont tous les termes à partir d'un indice suffisamment élevé restent constants, resp. sont égaux à 0.

Espaces ($L^{(p)}$) *où* $p > 1$. Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans ($L^{(p)}$) étant (cf. Chap. IV, § 4, p. 64) de la forme

$$(27) \qquad \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad où \quad \alpha(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}),$$

la suite des fonctionnelles

$$(28) \qquad \{f_n(x)\} = \left\{\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt\right\} \quad où \quad \alpha_n(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (27), lorsqu'on a

$$(29) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$$

pour toute fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$.

Or, on peut montrer aisément que *pour la convergence faible de la suite* (28) *vers la fonctionnelle* (27), *il faut et il suffit que l'on ait simultanément:*

$$(30) \qquad \text{la suite } \left\{\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right\} \text{ bornée}$$

et

$$(31) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)\,dt = \int_0^u \alpha(t)\,dt \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$ [1].

La démonstration résulte du th. 2, p. 123, étant donné que l'on a $\|f_n\| = \left[\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right]^{\frac{p-1}{p}}$, que, en outre, les fonctions $x_u(t)$ définies pour $0 \leqslant u \leqslant 1$ par les conditions

$$x_u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant u \\ 0 & \text{pour} \quad u < t \leqslant 1 \end{cases}$$

forment un ensemble total dans $(L^{(p)})$ et enfin que $\int_0^1 x_u(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^u \alpha_n(t)\,dt$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Espace (L). Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans (L) étant de la forme

$$(32) \qquad f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad \text{où} \quad \alpha(t) \subset (M)$$

(cf. Chap. IV, § 4, p. 65), la suite des fonctionnelles

[1]) Ces conditions ont été données par F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497.

$$(33) \qquad \{f_n(x)\} = \left\{\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt\right\} \quad où \quad \alpha_n(t) \subset (M)$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (32), lorsqu'on a

$$(34) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad pour\ tout \quad x(t) \subset (L).$$

On montre comme dans le cas qui précède que *pour la convergence faible de la suite de fonctionnelles linéaires* (33) *vers la fonctionnelle* (32), *il faut et il suffit d'avoir simultanément:*

(35) *les fonctions de la suite* $\{\alpha_n(t)\}$ *bornées dans leur ensemble, en dehors tout au plus d'un ensemble de valeurs de* t *de mesure lebesguienne nulle,*

$$(36) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)\,dt = \int_0^u \alpha(t)\,dt \quad pour \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\,[1].$$

Remarque. Les conditions (30) et (31) sont évidemment nécessaires et suffisantes pour que l'on ait la propriété (29). Il en est de même des conditions (35) et (36) pour la propriété (34).

Espaces $(l^{(p)})$ *où* $p \geqslant 1$. Toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans $(l^{(p)})$ étant de la forme

$$(37) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i \ où\ x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)}) \ et\ \{\alpha_i\} \subset \begin{cases} (l^{(\frac{p}{p-1})}) & pour\ p>1 \\ (M) & pour\ p=1 \end{cases}$$

(cf. Chap. IV, § 4, p. 67—68), la suite des fonctionnelles

$$(38) \quad \{f_n(x)\} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\,\xi_i\right\} \quad où \quad \{\alpha_{in}\} \subset \begin{cases} (l^{(\frac{p}{p-1})}) & pour \quad p>1 \\ (M) & pour \quad p=1 \end{cases}$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (37), lorsqu'on a

$$(39) \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\,\xi_i = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i \quad pour\ tout \quad x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)}).$$

[1]) Ces conditions ont été trouvées par M. Lebesgue.

Pour que la suite des fonctionnelles linéaires (38) *converge faiblement vers la fonctionnelle* (37), *il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

$$(40)\quad \textit{la suite:}\quad \begin{cases} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|^{\frac{p}{p-1}}\right\} & \textit{pour}\quad p > 1 \\ \{\underset{1 \leqslant i < \infty}{\text{borne sup}} |\alpha_{in}|\} & \textit{pour}\quad p = 1 \end{cases} \quad \textit{bornée,}$$

$$(41)\qquad \lim \alpha_{in} = \alpha_i \quad \textit{pour}\quad i = 1, 2, \ldots$$

La démonstration résulte du th. 2, § 4, p. 123, en s'appuyant sur le fait que les éléments

$$x_j = \{\xi_{ij}\} \quad \textit{où} \quad \xi_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad i = j \\ 0 & \textit{pour} \quad i \neq j \end{cases}$$

forment une suite totale dans $(l^{(p)})$ et que l'on a en outre $f_n(x_j) = \alpha_{jn}$ pour tous j et n naturels; on tiendra compte enfin de la représentation de la norme des fonctionnelles linéaires dans les espaces $(l^{(p)})$, donnée p. 68.

Remarque. Les conditions (40) et (41) sont en même temps nécessaires et suffisantes pour (39).

Espace (c). Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans (c)

$$(42)\quad f(x) = A \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \quad \textit{où} \quad x = \{\xi_i\} \subset (c) \quad \textit{et} \quad \{\alpha_i\} \subset (l)$$

(cf. Chap. IV, § 4, p. 66), la suite des fonctionnelles linéaires

$$(43)\quad \{f_n(x)\} = \left\{A_n \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \xi_i\right\} \textit{ où } \{\alpha_{in}\} \subset (l) \textit{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (42), lorsque

$$(44)\ \lim_{n\to\infty}\left[A_n \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \xi_i\right] = A \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \textit{ pour tout } x = \{\xi_i\} \subset (c).$$

On montre facilement que *pour la convergence faible de la suite* (43) *vers la fonctionnelle* (42), *il faut et il suffit d'avoir simultanément*

(45) *la suite* $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|\right\}$ *bornée*,

(46) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *et* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

§ 7. *Compacticité faible d'ensembles bornés dans certains espaces.*

Les résultats qui précèdent permettent de déduire en vertu du th. 3, p. 123, les théorèmes suivants.

Pour $(L^{(p)})$ *où* $p > 1$. *Toute suite de fonctions* $\{\alpha_n(t)\}$, *où* $\alpha_n(t) \subset (L^{(p)})$, *assujettie à la condition*

$$\int_0^1 |\alpha_n(t)|^p \, dt < M,$$

où M *est un nombre indépendant de* n, *contient une suite partielle* $\{\alpha_{n_i}(t)\}$ *telle que l'on a pour une fonction* $\alpha_0(t) \subset (L^{(p)})$:

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \alpha_{n_i}(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 \alpha_0(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{pour tout} \quad x(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})\ ^{1)}.$$

En effet, les expressions $\int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ peuvent être regardées comme des fonctionnelles linéaires définies dans $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$. L'ensemble de leurs normes étant borné et l'espace $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ étant séparable, on peut d'après le th. 3, p. 123, extraire de la suite $\{\alpha_n(t)\}$ une suite faiblement convergente; on n'a ensuite qu'à appliquer l'énoncé établi pour les espaces $(L^{(p)})$ au § 6, p. 127.

Pour (M). Toute suite de fonctions $\{\alpha_n(t)\}$ *où* $\alpha_n(t) \subset (M)$

[1]) Ce théorème est dû à M. F. **Reisz**, l. c., p. 466—467.

dont les normes sont bornées dans leur ensemble contient une suite partielle $\{\alpha_{n_i}(t)\}$ *telle que l'on a pour une fonction* $\alpha_0(t) \subset (M)$:

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 \alpha_{n_i}(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 \alpha_0(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{pour tout} \quad x(t) \subset (L).$$

La démonstration est analogue à la précédente.

Pour $(l^{(p)})$ *où* $p > 1$ *et* (m) on a des théorèmes analogues.

§ 8. *Fonctionnelles linéaires faiblement continues définies dans les espaces des fonctionnelles linéaires.*

$F(f)$ où $f \subset \overline{E}$ désignant une fonctionnelle définie dans l'ensemble $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires (définies dans E supposé un espace du type (B)), nous appelons la fonctionnelle $F(f)$ *faiblement continue*, lorsqu'on a $\lim\limits_{n\to\infty} F(f_n) = F(f)$ pour toute suite $\{f_n\}$ de fonctionnelles linéaires faiblement convergente vers f.

Théorème 8. *Si l'espace* E *du type* (B) *est séparable et la fonctionnelle linéaire* $F(f)$ *définie pour* $f \subset \overline{E}$ *est faiblement continue, il existe un élément* $x_0 \subset E$ *tel que l'on a*

$$F(f) = f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \overline{E}. \tag{47}$$

Démonstration. Γ désignant l'ensemble de toutes les fonctionnelles $f \subset \overline{E}$ qui remplissent l'équation $F(f) = 0$, la continuité faible de F a pour conséquence facile que Γ est un ensemble faiblement fermé. On peut évidemment admettre que $\Gamma \neq \overline{E}$. Soit donc f_0 une fonctionnelle linéaire remplissant l'équation

$$F(f_0) = 1. \tag{48}$$

Il en résulte en vertu du th. 6, p. 125, l'existence d'un $x_0 \subset E$ tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1 \quad \textit{et} \quad f(x_0) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \Gamma. \tag{49}$$

Or, l'identité

$$f = f_0 \cdot F(f) + \varphi \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \overline{E}, \quad \textit{où} \quad \varphi = f - f_0 \cdot F(f), \tag{50}$$

donne, selon (48), $F(\varphi) = 0$, d'où $\varphi \subset \Gamma$ et par conséquent, d'après (49), $\varphi(x_0) = 0$, ce qui entraîne en vertu de (50) la propriété (47), q. f. d.

Remarque. Si l'espace E n'est pas séparable, le th. 8 reste vrai, pourvu que la fonctionnelle $F(f)$ soit linéaire et l'ensemble désigné par Γ soit régulièrement fermé (ce qui permet de faire appel dans le raisonnement au th. 1, p. 122, au lieu du th. 6, p. 125).

CHAPITRE IX.

Suites faiblement convergentes d'éléments.

§ 1. *Définition. Conditions pour la convergence faible des suites d'éléments.*

Une suite $\{x_n\}$ *d'éléments* de E s'appelle *faiblement convergente* vers l'élément $x \subset E$, lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \textit{pour tout} \quad f \subset \overline{E},$$

c. à d. pour toute fonctionnelle linéaire f définie dans l'espace donné E.

Théorème 1. *Pour que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x, il faut et il suffit d'avoir simultanément*

(1) *la suite* $\{|x_n|\}$ *bornée*

et

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ *pour tout* $\varphi \subset \Delta$ *où* Δ *est un ensemble dense dans* $\overline{E}$.

Démonstration. La nécessité de (1) résulte du th. 6 (Ch. V, § 1), p. 80, et celle de (2) est évidente.

Pour en démontrer la suffisance, considérons une fonctionnelle quelconque $f \subset \overline{E}$. En vertu de (2), il existe alors pour tout nombre $\varepsilon > 0$ une fonctionnelle $\varphi \subset \Delta$ telle que $|\varphi - f| < \frac{\varepsilon}{2M}$, où M désigne la borne supérieure des nombres $|x_n|$ et $|x|$, qui existe d'après (1). Par conséquent $|f(x - x_n)| \leqslant |\varphi(x - x_n)| +$

$+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot|x-x_n| \leqslant |\varphi(x-x_n)|+\varepsilon$; comme $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(x)$ et ε est arbitraire, on en conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$, c. à d. que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x.

Remarque. Il suffit d'ailleurs d'admettre de Δ que les combinaisons linéaires formées de fonctionnelles appartenant à l'ensemble Δ constituent un ensemble dense dans $\overline{\overline{E}}$.

Théorème 2. *Si la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x, il existe une suite $\{g_n\}$ de combinaisons linéaires d'éléments de $\{x_n\}$ telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x$.

La démonstration résulte du th. 6 (Chap. IV, § 3), p. 58, et de la définition de la convergence faible des suites d'éléments.

§ 2. *Convergence faible des suites d'éléments dans les espaces (C), ($L^{(p)}$), (c) et ($l^{(p)}$).*

Envisageons à présent la convergence faible des suites d'éléments dans les espaces particuliers les plus importants.

Espace (C). Etant donnée la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans (C) (voir p. 61), *pour qu'une suite de fonctions continues $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers la fonction continue $x(t)$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,dg(t)=\int_0^1 x(t)\,dg(t) \tag{3}$$

pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée.

Il en résulte que *pour la convergence faible d'une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t)\subset(C)$ vers la fonction $x(t)\subset(C)$, il faut et il suffit d'avoir simultanément*

(4) *les fonctions $x_n(t)$ où $n=1,2,\ldots$ bornées dans leur ensemble,*

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$ *pour tout* $t\subset[0,1]$.

En effet, la nécessité de (4) résulte du th. 1, p. 133, et celle de (5) est une conséquence du fait que, t_0 désignant un point arbitraire de $[0,1]$, la fonctionnelle $f(x) = x(t_0)$ est linéaire, d'où $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ et par conséquent $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t_0) = x(t_0)$.

La suffisance consiste en ce que les conditions (4) et (5) entraînent l'égalité (3) pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée (cf. Introduction, § 5, p. 7).

Ceci établi, on obtient du th. 2, p. 134, le théorème suivant:

Si une suite de fonctions continues $\{x_n(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ est bornée et converge partout vers une fonction continue $x(t)$, il existe une suite de polynômes formés de termes de la suite $\{x_n(t)\}$ et qui converge vers $x(t)$ uniformément.

C'est une propriété remarquable de l'espace des fonctions continues et qui est en défaut p. ex. déjà pour les fonctions de la première classe de Baire.

Espaces $(L^{(p)})$ où $p > 1$. La suite $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ converge faiblement vers $x(t) \subset (L^{(p)})$, lorsqu'on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

pour toute fonction $\alpha(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$.

Il en résulte en vertu de la remarque, p. 128, le théorème suivant:

Pour la convergence faible d'une suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ vers la fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$, il faut et il suffit d'avoir à la fois

(6) *la suite* $\left\{ \int |x_n(t)|^p\, dt \right.$ *bornée*

et

$$\text{(7)} \qquad \lim_{n \to \infty} \int^u x_n(t)\, dt = \int^u x(t)\, dt \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\ ^{1)}.$$

[1]) Ce théorème a été démontré par M. F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 465—466.

Espace (L). La suite $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers $x_0(t)$ où $x_n \subset (L)$, $x_0 \subset (L)$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,\alpha(t)\,dt \tag{8}$$

pour toute fonction bornée $\alpha(t)$.

Il en résulte le théorème suivant:

Pour la convergence faible de la suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ appartenant à (L) vers la fonction $x(t) \subset (L)$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:

(9) *la suite* $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,dt\right\}$ *est bornée,*

(10) *il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'on ait*

$$\left|\int_H x_n(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots$$

pour tout ensemble H de mesure $< \eta$ de valeurs de t [1]*,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,dt = \int_0^u x_0(t)\,dt \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{11}$$

En effet, (8) équivaut à l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 [x_n(t) - x_0(t)]\,\alpha(t)\,dt = 0$ pour $\alpha(t) \subset (M)$; le théorème en question s'en déduit facilement à l'aide du théorème de Lebesgue énoncé p. 7 (voir Introduction, § 6).

Espace (c). Pour qu'une suite $\{x_n\}$ où $x_n = \{\xi_i^n\} \subset (c)$ converge faiblement vers l'élément $x = \{\xi_i\} \subset (c)$, il faut et il suffit d'avoir à la fois:

(12) *la suite $\{\|x_n\|\}$ bornée,*

[1] Cette condition (10) implique d'ailleurs la condition (9).

(13) $\lim \xi_i^n = \xi_i$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^n) = \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i$.

La démonstration est immédiate, étant donné que toute fonctionnelle linéaire dans (c) est de la forme $f(x) = C \lim \xi_i + \sum\limits_{i=1} C_i \xi_i$ où $x = \{\xi_i\}$ et $|f| = |C| + \sum\limits_{i=1} |C_i|$ (voir p. 66) et en tenant compte du fait que, si l'on pose

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i & \textit{pour} \quad i = 0 \\ \xi_i & \textit{pour} \quad i \geqslant 1, \end{cases}$$

les combinaisons linéaires formées de termes de la suite $\{f_i(x)\}$ où $i = 0, 1, 2, \ldots$ constituent un ensemble dense dans celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c).

Espaces $(l^{(p)})$ *où* $p > 1$. *Pour qu'une suite* $\{x_n\}$ *où* $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)})$ *converge faiblement vers* $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$, *il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

(14) *la suite des nombres* $\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right\}$ *bornée*

et

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

La démonstration résulte de la remarque, p. 129.

Espace (l). *Pour qu'une suite* $\{x_n\}$ *où* $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l)$ *converge faiblement vers* $x = \{\xi_i\} \subset (l)$, *il faut et il suffit que l'on ait* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, c'est à dire, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0$.

En conséquence:

Dans l'espace (l) *la convergence faible est équivalente à la convergence suivant la norme.*

Démonstration. Admettons que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x. En posant $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$, la suite $\{y_n\}$ où $y_n = \{\eta_i^{(n)}\}$ converge donc faiblement vers Θ avec $n \to \infty$. On a par conséquent pour toute suite bornée de nombres $\{c_i\}$

(16) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n)} = 0 .$$

Soit

$$c_i = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad j = i \\ 0 & \textit{pour} \quad j \neq i, \end{cases}$$

d'où

(17) $$\lim_{n\to\infty} \eta_j^{(n)} = 0 \quad \textit{pour tout} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Il s'agit de montrer que l'on a

(18) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| = \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0 .$$

Supposons par contre que

(19) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| > \varepsilon > 0 .$$

Définissons par induction deux suites croissantes de nombres naturels $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ comme il suit:

1° n_1 est le plus petit n tel que $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| > \varepsilon$,

2° r_1 est le plus petit r tel que $\sum_{i=1}^{r} |\eta_i^{(n_1)}| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum_{i=r+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon}{5}$,

3° n_k est le plus petit nombre naturel dépassant n_{k-1} et tel que $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}| > \varepsilon$ et $\sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}$,

4° r_k est le plus petit nombre naturel dépassant r_{k-1} et tel que $\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Les suites $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ ainsi définies existent en vertu de (17) et (19). Or, soit maintenant

(20) $$c_i = \begin{matrix} \operatorname{sign} \eta_i^{(n_1)} & \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1 \\ \operatorname{sign} \eta_i^{(n_{k+1})} & \textit{pour} \quad r_k < i \leqslant r_{k+1} . \end{matrix}$$

On a donc $|c_i| = 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$, d'où selon (16)

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n_k)} = 0\,. \tag{21}$$

Mais, d'après (20), on a $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}|$, d'où, en vertu de 3° et 4°, $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{5}-\frac{\varepsilon}{5}=\frac{\varepsilon}{10}$ pour tout $k=1,2,\ldots$, ce qui est incompatible avec (21). On a donc l'égalité (18), c. q. f. d.

§ 3. *Relation entre la convergence faible et forte dans les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ pour $p>1$.*

Au sujet de la relation entre la convergence faible d'éléments et celle selon la norme on peut énoncer pour les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p>1$ les théorèmes plus généraux suivants:

Si la suite $\{x_n(t)\}$, où $x_n(t)\subset(L^{(p)})$ et $p>1$, converge faiblement vers $x(t)\subset(L^{(p)})$ et si en outre

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt = \int_0^1 |x(t)|^p\,dt\,,$$

alors la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers $x(t)$ selon la norme, c. à d. que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p\,dt = 0\ ^{1)}.$$

Nous allons démontrer le théorème analogue pour les espaces $(l^{(p)})$ où $p>1$ (le cas $p=1$ étant envisagé au § 2, qui précède).

[1]) Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Radon (Sitzungsberichte der Akad. für Wissensch. in Wien, 122 (1913), Abt. II-a, p. 1295—1438). Cf. aussi F. Riesz, Acta Litt. Ac. Scient. Szeged, 4 (1929), p. 58—64 et 182—185.

Si la suite $\{x_n\}$, où $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)})$ et $p \geqslant 1$, converge faiblement vers $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$ et si l'on a

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|,$$

alors

$$\lim |x_n - x| = 0. \tag{22}$$

Démonstration. On a d'après (15), p. 137,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i. \tag{23}$$

et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} + \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \tag{24}$$

où N est un nombre naturel arbitraire. Or,

$$\sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p} + \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} \xi_i|^p}$$

d'où par l'hypothèse et d'après (23) et (24)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leqslant \left[2\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p}\right]^p = 2^p \sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p$$

Comme $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p = 0$ et N est arbitraire, on en tire l'égalité (22), q. f. d.

§ 4. *Espaces faiblement complets.*

Etant donné dans un espace E du type (B) une suite d'éléments $\{x_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E, il peut n'exister aucun élément $x_0 \subset E$ vers lequel la suite $\{x_n\}$ soit faiblement convergente, c. à d. tel que l'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ pour toutes les fonctionnelles linéaires $f \subset \overline{E}$ à la fois.

En voici un exemple dans l'espace (C). Soit $\{x_n(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ une suite de fonctions continues, bornées dans leur ensemble et convergeant partout vers une fonction $z(t)$ qui n'est pas continue. La limite $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x_n(t)\,dg$ existe alors pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée (cf. Introduction, § 5, p. 7), mais la suite $\{x_n(t)\}$ ne converge faiblement vers aucune fonction continue.

Cependant on a le théorème:

Dans les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ pour une suite $\{x_n\}$, quelle que soit la fonctionnelle linéaire f, entraîne la convergence faible de la suite $\{x_n\}$ vers un élément x_0.

Démonstration pour (L) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt$, où $x_n(t) \subset (L)$, existe pour toute fonction $\alpha(t) \subset (M)$, on a évidemment

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}}\int_0 [x_p(t)-x_q(t)]\,\alpha(t)\,dt = 0 \quad \textit{pour tout} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

Nous allons montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ et un N naturel tels que l'on a

$$\int_H \left| x_N(t) - x_n(t) \right| dt < \varepsilon \tag{25}$$

pour tout $n \geqslant N$ et pour tout ensemble H de mesure $< \eta$.

En effet, il existerait dans le cas contraire deux suites infiniment croissantes de nombres naturels $\{p_k\}$ et $\{n_k\}$ et une suite d'ensembles $\{H_k\}$ de mesure tendant vers 0 telles que $\int\limits_{H_k} |x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)|\,dt \geqslant \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^1 [x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)]\,\alpha(t)\,dt = 0$ *pour tout* $\alpha(t) \subset (M)$, contrairement au th. de Lebesgue (voir Introduction, § 6, p. 7).

Ceci établi, on a donc en particulier, si η est suffisamment petit, $\int\limits_H |x_n(t)|\,dt < \frac{1}{2}\cdot\varepsilon$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, d'où selon (25),

$$(26) \qquad \int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{3}{2}\varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad n = 1, 2, \dots,$$

pourvu que la mesure de H soit $< \eta$.

Posons

$$(27) \qquad \lim_{n\to\infty} \int^t x_n(u)\, du = \beta(t).$$

Nous allons montrer que la fonction $\beta(t)$ est absolument continue.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe d'après (26) un $\eta > 0$ tel que l'on a $\int_H |x_n(t)|\, dt < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, \dots$ et pour tout ensemble H de mesure $< \eta$. En particulier, si H se compose d'un nombre fini de segments à extrémités t_i et t_i' n'empiétant pas l'un sur l'autre, on a donc $\lim_{n\to\infty} \int_H x_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_i \int_{t_i}^{t_i'} x_n(t)\, dt = \sum_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)]$, d'où $\left|\sum_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)]\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui exprime la continuité absolue de la fonction $\beta(t)$.

Ceci étant, on n'a qu'à poser $\beta'(t) = x_0(t)$ pour conclure de (27) et des conditions pour la convergence faible, établies p. 128, que la suite $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers $x_0(t)$.

Démonstration pour $(L^{(p)})$ *où* $p > 1$. Admettons que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt$, où $x_n(t) \subset (L^{(p)})$ quel que soit $n = 1, 2, \dots$, existe pour tout $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$. Les fonctionnelles $f_n(y) = \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt$ sont évidemment linéaires dans $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et comme, par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} f_n(y)$ existe pour tout $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, la fonctionnelle $f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$ est, selon le th. 4 (Chap. I, § 3), p. 23, également linéaire dans $(L^{(\frac{p}{p-1})})$; elle est donc (cf. Chap. IV, § 4, p. 64) de la forme $f(y) = \int^1 x_0(t)\, y(t)\, dt$ où $y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ et $x_0 \subset (L^{(p)})$.

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt=\int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \textit{pour tout} \quad y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}),$$

c. à d. que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x_0, c. q. f. d.

Démonstration pour (l) est analogue à celle du théorème établi au § 2, p. 137—139, et consiste à établir la convergence suivant la norme de la suite $\{x_n\}$ vers un élément x_0.

Démonstration pour $(l^{(p)})$ *où* $p>1$ est analogue à celle pour $(L^{(p)})$.

§ 5. *Un théorème sur la convergence faible d'éléments.*

Nous allons terminer ce chapitre par le théorème général suivant.

Théorème 3. *Etant donnée une opération linéaire $y=U(x)$ définie dans un espace E du type (B) et dont le contredomaine est situé dans un espace E_1, également du type (B), si une suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x_0 dans E, la suite $\{U(x_n)\}$ converge faiblement vers $U(x_0)$ dans E_1.*

Démonstration. Y étant une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E_1, la fonctionnelle $Y[U(x)]=X(x)$, définie dans E y est évidemment additive et continue, car on a $|X(x)|=|Y[U(x)]|\leqslant \leqslant |Y|\cdot|U(x)|\leqslant|Y|\cdot|U|\cdot|x|$.

La convergence faible de $\{x_n\}$ vers x_0 implique donc que $\lim\limits_{n\to\infty} Y[U(x_n)]=\lim\limits_{n\to\infty} X(x_n)=X(x_0)=Y[U(x_0)]$, c. à d. que $\{U(x_n)\}$ converge faiblement vers $U(x_0)$, c. q. f. d.

Remarque. Dans l'hypothèse supplémentaire que *l'opération $y=U(x)$ est totalement continue,* la convergence faible de $\{x_n\}$ vers x_0 entraîne la *convergence de $\{U(x_n)\}$ vers $U(x_0)$ selon la norme,* c. à d. l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}|U(x_n)-U(x_0)|=0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un $\varepsilon > 0$ et une suite partielle $\{x_{n_i}\}$ telle que

$$(28) \qquad |U(x_{n_i}) - U(x_0)| > \varepsilon \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

la suite $\{U(x_{n_i})\}$ convergeant en même temps suivant la norme vers un $y' \subset E_1$. Or, la convergence faible de $\{x_{n_i}\}$ vers x_0 entraînant d'autre part, en vertu du th. 3 qui précède, celle de $\{U(x_{n_i})\}$ vers $U(x_0)$, on aurait $y' = U(x_0)$, ce qui est impossible selon (28).

CHAPITRE X.

Equations fonctionnelles linéaires.

§ 1. *Relations entre les opérations linéaires et les opérations conjuguées avec elles* [1]).

Nous allons nous occuper dans ce chapitre des équations de la forme $y = U(x)$ où U est une opération linéaire ayant pour le domaine des x un espace E du type (B) et pour le contredomaine un espace E_1 situé dans une espace E' également du type (B).

Les fonctionnelles définies dans E seront désignées par X et celles définies dans E' par Y.

Si la transformation de E en E_1 déterminée par l'opération linéaire $y = U(x)$ est biunivoque, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est évidemment additive. Il est facile de voir que pour l'existence de l'opération inverse, il faut et il suffit que

$$U(x) = \Theta \quad \textit{entraîne} \quad x = \Theta .$$

Si l'opération inverse est continue, il existe un $M > 0$ tel que $\|x\| \leqslant M \cdot \|y\|$.

Réciproquement, s'il existe un nombre $m > 0$ tel que $m \cdot \|x\| \leqslant \leqslant \|U(x)\|$, il existe l'opération inverse continue.

Si l'opération inverse est continue, le contredomaine E_1 est fermé.

En effet, en posant $\lim y_n = y$, où $y_n = U(x_n)$, on a

[1]) Les théorèmes du § 1 de ce chapitre se trouvent dans la note de S. Bañach, l. c., Stud. Math. I (1929), p. 234—238.

$\lim\limits_{p\to\infty,\, q\to\infty} \| x_p - x_q \| \leqslant M \cdot \lim\limits_{p\to\infty,\, q\to\infty} \| y_p - y_q \| = 0$, d'où, en posant $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, on tire $U(x) = y$.

Si la fonctionnelle Y_0 est une limite transfinie de la suite $\{Y_\xi\}$ du type ϑ, la fonctionnelle conjuguée $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ est une limite transfinie de la suite $\{X_\xi\} = \{\overline{U}(Y_\xi)\}$ du type ϑ.

En effet, on a pour tout x les égalités $X_\xi(x) = Y_\xi[U(x)]$ où $1 \leqslant \xi < \vartheta$.

Lemme. *L'opération associée $X = \overline{U}(Y)$ admettant l'opération inverse continue et Γ_1 désignant un ensemble quelconque des Y vectoriel et régulièrement fermé, l'ensemble correspondant $\Gamma = \overline{U}(\Gamma_1)$ est aussi régulièrement fermé.*

Démonstration. Il existe par hypothèse un nombre $M > 0$ tel que l'on a $\| \overline{U}(Y) \| \geqslant M \cdot \| Y \|$ pour tout Y. Par conséquent, si $X_\xi \subset \overline{U}(\Gamma_1)$ et $\| X_\xi \| \leqslant C$ pour tout $1 \leqslant \xi < \vartheta$, où $X_\xi = \overline{U}(Y_\xi)$, on aura aussi $Y_\xi \subset \Gamma_1$ et $\| Y_\xi \| \leqslant \frac{1}{M} C$ pour tout $1 \leqslant \xi < \vartheta$. L'ensemble Γ_1 étant par hypothèse régulièrement fermé, il existe en vertu du lem. 3 (Chap. VIII, § 3), p. 121, une limite transfinie $Y_0 \subset \Gamma_1$ de la suite $\{Y_\xi\}$. Evidemment la fonctionnelle $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ appartient donc à $\overline{U}(\Gamma_1)$ et elle est une limite transfinie de la suite $\{X_\xi\}$. Ainsi l'ensemble $\Gamma = \overline{U}(\Gamma_1)$ est transfiniment fermé, donc, en vertu du même lemme, régulièrement fermé, c. q. f. d.

Théorème 1. *Si l'opération associée $X = \overline{U}(Y)$ admet l'opération inverse continue, l'équation $y = U(x)$ admet une solution pour tout y.*

Démonstration. Etant donné un $y_0 \subset E'$ quelconque, désignons par Γ_1 l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires Y telles que $Y(y_0) = 0$ et par Γ celui de toutes les fonctionnelles $X = \overline{U}(Y)$ où $Y \subset \Gamma_1$.

L'ensemble Γ_1 est régulièrement fermé; il en résulte en vertu du lemme qui précède que l'ensemble Γ est aussi régulièrement fermé. D'autre part, Y_0 étant une fonctionnelle linéaire telle que

$Y_0(y_0) = 1$, la fonctionnelle $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ n'appartient pas à Γ. Il existe donc en vertu du th. 1 (Chap. VIII, § 3), p. 122, un élément $x_0 \subset E$ tel que l'on a

(1) $$X_0(x_0) = 1 \quad et \quad X(x_0) = 0 \quad pour\ tout \quad X \subset \Gamma.$$

En posant

(2) $$y_1 = U(x_0),$$

on a $Y_0(y_1) = X_0(x_0)$ et $Y(y_1) = X(x_0)$, d'où en raison de (1)

(3) $$Y_0(y_1) = 1 \quad et \quad Y(y_1) = 0 \quad pour\ tout \quad Y \subset \Gamma_1.$$

Or, quelle que soit la fonctionnelle linéaire Y, la fonctionnelle $\overline{Y} = Y - [Y(y_0)] \cdot Y_0$ appartient évidemment à Γ_1, puisque $\overline{Y}(y_0) = = Y(y_0) - [Y(y_0)] \cdot Y_0(y_0) = 0$. On a par conséquent, selon (3) $\overline{Y}(y_1) = Y(y_1) - [Y(y_0)] \cdot Y_0(y_1) = Y(y_1) - Y(y_0) = 0$, donc $Y(y_1 - y_0) = 0$ pour tout Y. Il en résulte l'égalité $y_1 - y_0 = 0$, donc, d'après (2), la solution $y_0 = U(x_0)$ pour l'élément $y_0 \subset E'$, qui a été arbitrairement donné d'avance, c. q. f. d.

Réciproquement, on a le

Théorème 2. *Si l'équation $X = \overline{U}(Y)$ admet une solution pour tout X, alors*

1° *l'opération $y = U(x)$ admet l'opération inverse continue,*

2° *le contredomaine de $U(x)$ est l'ensemble des y qui satisfont à la condition*

(4) $$Y(y) = 0, \quad si \quad \overline{U}(Y) = 0.$$

Démonstration. 1°. Si l'opération $y = U(x)$ n'admettait pas d'opération inverse continue, il existerait une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E tels que

(5) $$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \infty$$

et $\lim\limits_{n \to \infty} \| y_n \| = 0$ où $y_n = U(x_n)$.

Or, l'équation $X = \overline{U}(Y)$ admettant par hypothèse une solution, quel que soit X, on a $\lim\limits_{n \to \infty} X(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} Y(y_n) = 0$ pour toute fonction-

nelle X définie dans E, ce qui implique en vertu du th. 6 (Chap. V, § 1), p. 80, que la suite des normes $\{\|x_n\|\}$ est bornée, contrairement à (5).

2°. Admettons que pour un élément $y_0 \subset E'$

$$\overline{U}(Y) = 0 \quad \textit{entraîne} \quad Y(y_0) = 0. \tag{6}$$

Le contredomaine E_1 de l'opération $U(x)$ étant fermé en vertu de 1° (cf. ce Chapitre § 1, p. 145), si y_0 n'appartenait pas à E_1, il existerait (cf. Chap. IV, § 3, p. 57, lemme) une fonctionnelle Y_0 telle que

$$Y_0(y_0) = 1 \tag{7}$$

et $Y_0(y) = 0$ pour tout $y \subset E_1$. En posant $X_0 = \overline{U}(Y_0)$, on aurait donc $X_0(x) = Y_0(y) = 0$ où $y = U(x) \subset E_1$, d'où $\overline{U}(Y_0) = 0$, ce qui entraîne, d'après (6), $Y_0(y_0) = 0$, contrairement à (7). Par conséquent $y_0 \subset E_1$.

Réciproquement, si $\overline{U}(Y) = X = 0$, on a pour tout $y \subset E_1$ l'égalité $Y(y) = X(x) = 0$, c. q. f. d.

En remplaçant dans les théorèmes 1 et 2 qui précèdent x, y, X, Y, U et $\overline{U}$ respectivement par $Y, X, y, x, \overline{U}$ et U et en appliquant dans le raisonnement les théorèmes sur les fonctionnelles là où on a fait appel aux théorèmes concernant les éléments, on obtient les deux théorèmes suivants.

Théorème 3. *Si l'opération $y = U(x)$ admet l'opération inverse continue, l'équation $X = \overline{U}(Y)$ admet une solution pour toute fonctionnelle linéaire X définie dans E.*

Théorème 4. *Si l'équation $y = U(x)$ admet une solution pour tout y, alors*

1° *l'opération $X = \overline{U}(Y)$ admet l'opération inverse continue,*

2° *son contredomaine est l'ensemble des X remplissant pour tout $x \subset E$ la condition:*

$$X(x) = 0, \quad si \quad U(x) = 0. \tag{8}$$

Les théorèmes 1 — 4 donnent lieu facilement aux théorèmes suivants.

Théorème 5. *Si l'équation* $y = U(x)$ *admet pour tout* y *exactement une solution, l'équation* $X = \overline{U}(Y)$ *en admet aussi exactement une pour tout* X *et réciproquement.*

Théorème 6. *Si les opérations* $y = U(x)$ *et* $X = \overline{U}(Y)$ *admettent les opérations inverses continues, il existe pour tout* y *et pour tout* X *exactement un* x *et un* Y *tels que l'on a* $y = U(x)$ *et* $X = \overline{U}(Y)$.

Théorème 7. *Si les opérations* $y = U(x)$ *et* $X = \overline{U}(Y)$ *admettent une solution pour tout* y *et pour tout* X, *elle est unique.*

Nous allons démontrer en outre les trois théorèmes qui suivent.

Théorème 8. *Si le contredomaine d'une opération linéaire* $U(x)$ *est fermé, celui de l'opération associée* $\overline{U}(Y)$ *est l'ensemble des* X *qui remplissent la condition* (8): $X(x) = 0$, *si* $U(x) = 0$.

Démonstration. L'ensemble dérivé E_1' du contredomaine $E_1 \subset E'$ de l'opération $U(x)$ constitue (comme ensemble linéaire et fermé) un espace du type (B).

Or, en désignant par Z une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E_1' et par $U_1(Z)$ la fonctionnelle linéaire X satisfaisant à l'équation

$$Z[U(x)] = X(x) \quad pour\ tout \quad x \subset E,$$

on vérifie aisément que les contredomaines des opérations $\overline{U}_1(Z)$ et $\overline{U}(Y)$ sont identiques. En effet, pour toute fonctionnelle Y définie dans E' et assujettie à la condition

$$(9) \qquad Z(y) = Y(y) \quad pour\ tout \quad y \subset E_1',$$

on a $Z[U(x)] = Y[U(x)]$ pour tout $x \subset E$, d'où

$$(10) \qquad \overline{U}_1(Z) = \overline{U}(Y)$$

et, par définition de Z, il existe en vertu du th. 2 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle linéaire Y définie dans E' et satisfaisant à la condition (9), donc à (10). La condition (8) en résulte en vertu du th. 4, 2°, p. 148, en remplaçant E' par E_1.

Théorème 9. *Si le contredomaine de l'opération linéaire* $\overline{U}(Y)$ *est fermé, celui de l'opération* $U(x)$ *est l'ensemble de tous les* y *qui remplissent la condition* (4): $Y(y)=0$, *si* $\overline{U}(Y)=0$.

Démonstration. Les fonctionnelles Z et $\overline{U_1}(Z)$ étant définie comme dans la démonstration du th. 8, qui précède, remarquons que $\overline{U_1}(Z)=\Theta$ entraîne $Z(y)=0$ pour tout $y \subset E_1'$; on a donc $Z=\Theta$.

Or, les ensembles des Z et des X étant des espaces du type (B), l'opération $X=\overline{U_1}(Z)$ admet en vertu du th. 5 (Chap. III, § 3) p. 41, l'opération inverse continue. Il en résulte en vertu du th. 1, p. 146, que l'équation $y=U(x)$ possède une solution pour tout $y \subset E_1'$. Le contredomaine $E_1=E_1'$ de l'opération $y=U(x)$ est donc fermé.

La condition (4) étant évidemment remplie, lorsque $y \subset E_1$, il ne reste donc qu'à établir la réciproque, c. à d. démontrer que tout $y_0 \subset E'$ qui satisfait à (4) appartient à E_1.

En effet, E_1 étant un ensemble linéaire et fermé, il existerait dans le cas contraire (cf. Chap. IV, § 3, p. 57, lemme) une fonctionnelle linéaire Y_0 telle que $Y_0(y_0)=1$ et $Y_0(y)=0$ pour tout $y \subset E_1$. En posant donc $X_0=\overline{U}(Y_0)$, on aurait $X_0(x)=Y_0(y)=0$ pour $x \subset E$, d'où $X_0=0$, et par conséquent $\overline{U}(Y_0)=0$, contrairement à la condition (4) supposée pour y_0.

Théorème 10. *Si le contredomaine* E_1 *de l'opération linéaire* $y=U(x)$ *est fermé, il existe un nombre* $m>0$ *tel qu'à tout* $y \subset E_1$ *on peut faire correspondre un* $x \subset E$ *satisfaisant aux conditions*

$$y=U(x) \quad \textit{et} \quad |x| \leqslant m \cdot |y|.$$

Démonstration. Nous avons établi au cours de la démonstration du th. 3 (Chap. III, § 3), p. 38, la proposition (1), qui, dans les hypothèses du théorème à démontrer, exprime l'existence pour tout $\varepsilon>0$ d'un $\eta>0$ tel que, étant donné un y arbitraire assujetti à l'inégalité $|y|<\eta$, on peut lui faire correspondre un x satisfaisant aux conditions $y=U(x)$ et $|x|<\varepsilon$.

On en déduit facilement l'existence pour tout y d'un x satisfaisant à la thèse du théorème avec $m=\frac{\varepsilon}{\eta}$.

§ **2.** *La théorie de Riesz des équations linéaires totalement continues.*

Nous allons nous occuper à présent des équations de la forme $y = x - U(x)$, où U est une opération linéaire totalement continue et *dont le contredomaine est situé dans le domaine* (dans l'espace E des valeurs de x)[1].

Lemme. *Si l'opération linéaire $U(x)$ est totalement continue, l'opération $T(x) = x - U(x)$ transforme tout ensemble borné et fermé $G \subset E$ en ensemble fermé.*

Démonstration. Posons

$$(11) \qquad x_n \subset G \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots \quad et \quad \lim_{n \to \infty} T(x_n) = y_0.$$

La suite $\{U(x_n)\}$ étant en conséquence un ensemble compact, il existe une suite partielle $\{U(x_{n_i})\}$ convergente vers un élément $x_0 \subset G$. Comme $x_{n_i} = U(x_{n_i}) + T(x_{n_i})$, on a selon (11) $\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = x_0 + y_0$, d'où $T(y_0 + x_0) = y_0$.

Théorème 11. *Si l'opération linéaire $U(x)$ est totalement continue, les contredomaines des opérations*

$$T(x) = x - U(x) \quad et \quad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X)$$

sont fermés.

Démonstration. G désignant l'ensemble des solutions de l'équation $T(x) = 0$, soit $y_0 \neq \Theta$ un élément d'accumulation du contredomaine de l'opération T. Il existe par conséquent une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E telle que $y_0 = \lim_{n \to \infty} T(x_n)$.

Si la suite $\{\| x_n \|\}$ était bornée, l'élément y_0 appartiendrait au contredomaine en vertu du lemme qui vient d'être démontré.

En désignant par d_n la distance entre x_n et l'ensemble G, il existe donc un $w_n \subset G$ tel que

[1]) Les théorèmes de ce §, excepté ceux où intervient la notion d'opération associée, ont été établis pour la première fois par F. Riesz (*Über lineare Funktionalgleichungen,* Acta Math. 41 (1918), p. 71—98).

$$(12) \qquad d_n \leqslant |x_n - w_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n \cdot$$

On a

$$(13) \qquad \lim_{n \to \infty} T(x_n - w_n) = y_0 \,.$$

Si la suite $\{|x_n - w_n|\}$ était bornée, la démonstration se trouverait achevée en raison du lemme qui précède.

Supposons donc que $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - w_n| = \infty$, d'où, en posant $z_n = \dfrac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|}$, on a, selon (13), $\lim\limits_{n \to \infty} T(z_n) = \Theta$ et $|z_n| = 1$. En vertu du lemme on peut donc extraire de la suite $\{z_n\}$ une suite $\{z_{n_i}\}$ convergente vers un élément w_0 tel que $T(w_0) = 0$, d'où $w_0 \subset G$. En posant $z_n - w_0 = \varepsilon_n$, il vient

$$(14) \qquad \lim_{i \to \infty} |\varepsilon_{n_i}| = 0 \,,$$

donc $z_n - w_0 = \dfrac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w_0 = \varepsilon_n$ et par conséquent $x_n - w_n - w_0 \cdot |x_n - w_n| = \varepsilon_n \cdot |x_n - w_n|$, d'où selon (12)

$$(15) \qquad |x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 \cdot |x_{n_i} - w_{n_i}|| \leqslant |\varepsilon_{n_i}| \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) d_{n_i} \,.$$

Or, il existe en vertu de (14) et (15) un n_i tel que l'on a $|x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 \cdot |x_{n_i} - w_{n_i}|| < \dfrac{d_{n_i}}{2}$; mais c'est impossible, car $w_{n_i} + w_0 \cdot |x_{n_i} - w_{n_i}| \subset G$ et d_{n_i} est la distance entre x_{n_i} et G.

Ainsi le contredomaine de T est fermé. Le raisonnement pour $\overline{T}(X)$ est analogue.

Théorème 12. *Si l'opération linéaire $U(x)$ est totalement continue, les équations*

$$x = U(x) = \Theta \quad et \quad X - \overline{U}(X) = \Theta$$

admettent tout au plus un nombre fini de solutions linéairement indépendantes.

Démonstration. Supposons par contre qu'il existe une suite infinie $\{x_n\}$ d'éléments de E linéairement indépendants et satisfai-

sant aux équations $x_n - U(x_n) = \Theta$ où $n = 1, 2, \dots$ Soit E_n l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{n} h_i x_i$, où h_i sont des nombres réels quelconques. Evidemment

$$(16) \qquad x \subset E_n \quad \textit{entraîne} \quad x - U(x) = \Theta$$

et il est facile de voir que pour tout $n = 1, 2, \dots$ l'ensemble E_n est linéaire et fermé, ne contenant pas x_{n+1}, donc un vrai sous-ensemble de E_{n+1}.

En vertu du lemme (Chap. V, § 3) p. 83, il existe donc une suite $\{y_n\}$ telle que

$$(17) \quad y_n \subset E_n, \quad \|y_n\| = 1 \quad \textit{et} \quad \|y_n - x\| > \frac{1}{2} \quad \textit{pour tout} \quad x \subset E_{n-1},$$

d'où, selon (16), $y_n - U(y_n) = \Theta$ et par conséquent $y_n = U(y_n)$. La suite $\{y_n\}$ est donc compacte, contrairement à (17).

Pour l'équation $X - U(X) = \Theta$ le raisonnement est analogue, car on peut considérer l'ensemble des X comme un espace du type (B).

Théorème 13. *Si pour une opération linéaire et totalement continue $U(x)$ l'équation $y = x - U(x)$, resp. $Y = X - \bar{U}(X)$, admet une solution pour tout y, resp. Y, l'équation $x - U(x) = \Theta$, resp. $X - \bar{U}(X) = \Theta$, admet exactement une solution, à savoir $x = \Theta$, resp. $X = \Theta$.*

Démonstration. Posons

$$T^{(1)}(x) = x - U(x) = T(x) \quad \textit{et} \quad T^{(n)}(x) = T[T^{(n-1)}(x)].$$

Désignons par E_n l'ensemble de tous les $x \subset E$ satisfaisant à l'équation $T^{(n)}(x) = \Theta$ et supposons qu'il existe un $x_1 \neq \Theta$ tel que $T(x_1) = \Theta$. En désignant par x_n l'élément satisfaisant à l'équation $x_{n-1} = T(x_n)$, on a donc

$$T^{(n)}(x_{n+1}) = x_1 \neq \Theta \quad \textit{et} \quad T^{(n+1)}(x_{n+1}) = T(x_1) = \Theta$$

d'où

$$x_{n+1} \subset E_{n+1} - E_n.$$

L'ensemble E_n est évidemment linéaire et fermé; il est un vrai sous-ensemble de E_{n+1}. En vertu du lemme, p. 83, il existe donc une suite $\{y_n\}$ remplissant la condition (17).

Or, comme $y_n \subset E_n$, on a par définition de T et de E_n l'égalité $T(y_n) = y_n - U(y_n)$, d'où

$$(18) \quad U(y_p) - U(y_q) = y_p - [y_q + T(y_p) - T(y_q)] = y_p - x$$

et $p > q$ entraîne $T^{(p-1)}(x) = T^{(p-1)}(y_q) + T^{(p)}(y_p) - T^{(p)}(y_q) = \Theta$.

Par conséquent $x \subset E_{p-1}$, d'où, en vertu de (17), $|y_p - x| > \frac{1}{2}$, donc, d'après (18), $|U(y_p) - U(y_q)| > \frac{1}{2}$ pour $p > q$, ce qui est impossible, car la suite $\{U(y_n)\}$ contient des suites partielles convergentes. On doit donc admettre que $x = \Theta$, c. q. f. d.

Pour l'équation $X = U(X) = \Theta$ la démonstration est analogue, car on peut considérer l'ensemble des X comme un espace du type (B).

Théorème 14. *Si pour une opération linéaire et totalement continue $U(x)$ l'équation $x - U(x) = \Theta$, resp. $X - \overline{U}(X) = \Theta$, admet comme l'unique solution $x = \Theta$, resp. $X = \Theta$, l'équation $y = x - U(x)$, resp. $Y = X - \overline{U}(X)$, admet une solution pour tout y, resp. pour tout Y.*

Démonstration. Le contredomaine de l'opération $x - U(x)$ étant en vertu du th. 11, p. 151, fermé, on conclut de l'hypothèse en vertu du th. 3, p. 148, que l'équation $Y = X - \overline{U}(X)$ admet une solution pour tout Y, d'où, en vertu du th. 13 qui précède, la seule solution de l'équation $X - \overline{U}(X) = \Theta$ est donnée par $X = \Theta$ et par conséquent, en vertu du th. 5, p. 149, l'équation $y = x - U(x)$ est soluble pour tout y.

La démonstration pour $Y = X - \overline{U}(X)$ est symétrique.

Théorème 15. *Si $U(x)$ est une opération linéaire et totalement continue, les équations*

$$x - U(x) = \Theta \quad et \quad X - \overline{U}(X) = \Theta$$

admettent le même nombre de solutions linéairement indépendantes [1].

Démonstration. Posons comme auparavant

$$(19) \qquad T(x) = x - U(x) \quad et \quad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X).$$

Soient

$$(20) \quad T(x_i) = \Theta \ pour \ i = 1, 2, \dots, n \ et \ \overline{T}(X) = \Theta \ pour \ i = 1, 2, \dots, \nu$$

où les éléments de la suite $\{x_i\}$, de même que les fonctionnelles de la suite $\{X_i\}$, sont supposés linéairement indépendants et les nombres n et ν désignent respectivement les nombres les plus grands possibles de solutions linéairement indépendantes des équations $T(x) = \Theta$ et $\overline{T}(X) = \Theta$.

Désignons par z_i où $i = 1, 2, \dots, \nu$ un élément arbitraire tel que l'on ait

$$(21) \qquad X_j(z_i) = \begin{cases} 1 & pour \quad i = j \\ 0 & pour \quad i \neq j. \end{cases}$$

Un tel z_i existe, car l'ensemble linéaire de la forme $\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j X_j + \sum_{j=i+1} \beta_j X_j$ est faiblement fermé et ne contient pas X_i.

Désignons d'une façon analogue par Z_i où $i = 1, 2, \dots, n$ la fonctionnelle linéaire telle que

$$(22) \qquad Z_j(x_i) = \begin{cases} 1 & pour \quad i = j \\ 0 & pour \quad i \neq j. \end{cases}$$

Une telle fonctionnelle Z_i existe, car x_i n'appartient pas à l'ensemble linéaire fermé de la forme $\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j x_j + \sum_{j=i+1} \beta_j x_j$.

Ceci dit, *supposons d'abord que* $\nu > n$. Soit

[1]) Pour certains cas particuliers ce théorème a été établi par F. Riesz, l. c., Acta Math. 41 (1918), p. 96—98. En toute généralité, mais formulé autrement, ce théorème a été établi par M. T. H. Hildebrandt (*Über vollstetige lineare Transformationen*, Acta Math. 51 (1928), p. 311—318) et dans l'énoncé donné ici par M. J. Schauder, l. c., Studia Mathematica II (1930), p. 183—196.

(23) $$R(x) = U(x) + \sum_{i=1}^{n} Z_i(x) \cdot z_i \quad et \quad W(x) = x - R(x).$$

Il est facile de voir que l'opération $R(x)$ ainsi définie est totalement continue. Nous allons montrer que l'équation $W(x) = \Theta$ admet exactement une solution, à savoir $x = \Theta$.

En effet, admettons que $W(x_0) = \Theta$. Il s'agit de prouver que $x_0 = \Theta$. Or, on a selon (19) et (23):

(24) $$W(x_0) = x_0 - R(x_0) = T(x_0) - \sum_{i=1}^{n} Z_i(x_0) \cdot z_i = 0$$

et comme d'après (20)

(25) $$X_i T(x) = \Theta \quad pour\ tout \quad x \quad et \quad i = 1, 2, \dots, \nu,$$

on tire de (21') et (24)

(26) $$X_i W(x_0) = Z_i(x_0) = 0 \quad pour \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

d'où $T(x_0) = \Theta$, ce qui implique selon (20) et par définition de n que $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ où α_i sont des nombres réels correspondants. En vertu de (26) et (22) on a donc $Z_i(x_0) = \alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, d'où finalement $x_0 = \Theta$.

Ceci établi, on en conclut en vertu du th. 14, p. 154, que l'équation $x - R(x) = T(x) - \sum_{i=1}^{n} Z_i(x) \cdot z_i = z_{n+1}$ admet une solution. Mais on voit aussitôt en vertu de (21) et (25) que $X_{n+1}[x - R(x)] = 0$ et d'autre part, en vertu de (21), que $X_{n+1}(z_{n+1}) = 1$. La supposition que $\nu > n$ est donc impossible.

Supposons à présent que $\nu < n$. Soit $\bar{R}(x) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(x) \cdot z_i$, d'où $\bar{R}(X) = \sum_{i=1}^{\nu} X(z_i) \cdot Z_i$. En procédant comme plus haut, on montrerait alors que l'équation $\bar{T}(X) - \sum_{i=1}^{\nu} X(z_i) \cdot Z_i = \Theta$ (conjuguée

de l'équation $T(x) - \sum_{i=1} Z_i(x) \cdot z_i = \Theta$) admet exactement une solution, à savoir $X = \Theta$. L'équation $\overline{T}(X) - \sum_{i=1} X(z_i) \cdot Z_i = Z_{\nu+1}$ devrait donc, en vertu du th. 14, p. 154, admettre une solution, ce qui est cependant impossible, car on a $\overline{T}(X) \cdot x_{\nu+1} = X[T(x_{\nu+1})] = 0$ pour tout X, d'où, selon (22), $Z_i(x_{\nu+1}) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et d'autre part $Z_{\nu+1}(x_{\nu+1}) = 1$. Ainsi la supposition que $\nu < n$ implique également une contradiction.

§ 3. *Valeurs régulières et valeurs propres dans les équations linéaires.*

Admettons à présent de l'opération $U(x)$ qu'elle est tout simplement linéaire, mais maintenons l'hypothèse que son contredomaine est situé dans le domaine E.

L'opération $x - h\,U(x)$ est alors linéaire pour tout h réel et son opération associée est de la forme $X - h\,\overline{U}(X)$ ou $\overline{U}$ désigne l'opération associée à U.

Ceci dit, nous allons étudier les équations associées

$$(27) \qquad x - h\,U(x) = y \quad \textit{et} \quad X - h\,\overline{U}(X) = Y.$$

Si, pour un h_0 donné, la première, resp. la deuxième des équations (27) admet pour tout y, resp. pour tout Y, exactement une solution, h_0 s'appelle *valeur régulière* de cette équation; dans le cas contraire h_0 s'appelle sa *valeur propre*. L'ensemble des valeurs propres constitue l'ainsi dit *spectre*.

Si x, resp. X, satisfait à la première, resp. à la seconde, des équations

$$(28) \qquad x + h\,U(x) = \Theta \quad \textit{et} \quad X + h\,\overline{U}(X) = \Theta,$$

il porte le nom *d'élément propre*, resp. de *fonctionnelle propre*.

En vertu du th. 5, p. 149, les deux équations (27) ont le même ensemble des valeurs régulières, donc aussi des valeurs propres.

On énoncera sans peine les th. 1—9, établis p. 146—150, pour les équations de la forme (27). Ces théorèmes permettent de conclure sur la manière dont se comporte l'une des deux équations d'après celle dont se comporte l'autre et réciproquement.

Théorème 16. *L'ensemble des valeurs régulières est ouvert.*

Démonstration. h_0 étant une valeur régulière, il existe un nombre $m > 0$ remplissant les conditions

$$|x - h_0 U(x)| \geqslant m \cdot |x| \quad et \quad |X - h_0 \bar{U}(X)| \geqslant m \cdot |X|.$$

On a par conséquent pour tout ε:

$$|x - (h_0 + \varepsilon) U(x)| \geqslant |x - h_0 U(x)| - |\varepsilon| \cdot |U(x)| \geqslant (m - |\varepsilon| \cdot |U|) \cdot |x|$$

et d'une façon analogue

$$|X - (h_0 + \varepsilon) \bar{U}(X)| \geqslant (m - |\varepsilon| \cdot |\bar{U}|) \cdot |X|.$$

Il en résulte que pour des $|\varepsilon|$ assez petits les opérations

$$x - (h_0 + \varepsilon)\ U(x) \quad et \quad X - (h_0 + \varepsilon) \cdot \bar{U}(X)$$

ont les opérations inverses continues, ce qui a pour conséquence, en vertu du th. 6, p. 149, que $h_0 + \varepsilon$ est également une valeur régulière.

Théorème 17. *Si* $|h| < \frac{1}{|U|}$, *h est une valeur régulière*[1]).

Démonstration. Si $|h| < \frac{1}{|U|}$, les solutions peuvent être représentées sous la forme

$$(29) \qquad x = y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y) \quad et \quad X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \bar{U}^{(n)}(Y)$$

où

$$U^{(1)}(y) = U(y) \quad et \quad \bar{U}^{(1)}(Y) = \bar{U}(Y),$$

$$U^{(n)}(y) = U[U^{(n-1)}(y)] \quad et \quad \bar{U}^{(n)}(Y) = \bar{U}[\bar{U}^{(n-1)}(Y)].$$

[1]) Cf. S. Banach, l. c., Fund. Math. III (1922), p. 161, th. 7.

Les séries (29) sont convergentes, car on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^n U^{(n)}(Y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [|h| \cdot |U|]^n |Y|$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^n \overline{U}^{(n)}(Y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [|h| \cdot |\overline{U}|]^n |Y| .$$

Or, on obtient de (29):

$$U(x) = U(y) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n+1)}(y) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y) = \frac{1}{h}(x - y),$$

d'où $x - hU(x) = y$. D'une façon analogue on a $X - h\overline{U}(X) = Y$. Ainsi les équations (27) admettent des solutions pour tout y, resp. pour tout Y. En vertu du th. 7, p, 149, ces solutions sont donc uniques et par conséquent h en est une valeur régulière, c. q. f. d.

Théorème 18. *Si l'on a pour* $h \neq h'$:

$$x - hU(x) = \Theta \quad et \quad X - h'\overline{U}(X) = \Theta,$$

alors $X(x) = 0$.

En d'autres termes: *l'élément propre de la valeur h est orthogonal à toute fonctionnelle propre de la valeur h' distincte de h.*

Démonstration. On a $X(x) = hX[U(x)] = h\overline{U}(X) \cdot x$ et comme $\overline{U}(X) = \frac{1}{h'}$, il vient $X(x) = \frac{h}{h'} X(x)$. Si $h \neq h'$, on a donc $X(x) = 0$.

§ 4. *Théorèmes de Fredholm dans la théorie des équations linéaires totalement continues.*

Si, dans les hypothèses du § précédent, l'opération $U(x)$ est en outre supposée totalement continue, on peut énoncer pour les équations (28) les théorèmes suivants, qui constituent une généralisation des théorèmes de Fredholm sur les équations intégrales [1]).

[1]) Cf. J. Schauder, l. c., Studia Mathematica II (1930), p. 183—196.

Théorème 19. *Les équations* (28) *ont le même nombre fini* $d(h)$ *de solutions indépendantes.*

Ce n'est qu'un autre énoncé du th. 15, p. 154.

Théorème 20. *Si* $d(h)=0$, *h est une valeur régulière.*

C'est une conséquence des th. 14, p. 154, et 19, qui précède.

Théorème 21. *Si* $d(h)>0$ *et si*

$$\{x_i\}, \textit{ resp. } \{X_i\}, \quad \textit{où} \quad i=1,2,\ldots,d(h),$$

désignent les solutions des équations (28), *les équations* (27) *admettent des solutions pour tout* y *tel que* $X_i(y)=0$, *resp. pour tout* Y *tel que* $Y(x_i)=0$.

C'est une conséquence des th. 8, p. 149, resp. 9, p. 150, et 11, p. 151.

Nous allons démontrer le

Théorème 22. *Si l'opération linéaire* $U(x)$ *est totalement continue, les valeurs propres de la première équation* (27)

$$y=x-hU(x)$$

constituent un ensemble isolé[1]).

Démonstration. Soit $\{h_n\}$ une suite infinie de valeurs propres où $h_i\neq h_j$ pour $i\neq j$. Posons

$$x_n=h_nU(x_n) \quad \textit{et} \quad x_n\neq\Theta\,.$$

Montrons d'abord par recurrence que les éléments x_n sont linéairement indépendants.

En effet, si $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ l'étaient, mais $x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i$, on aurait $x_n=h_nU(x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}h_n\alpha_iU(x_i)$, d'où $x_n=\sum_{i=1}^{n-1}h_n\frac{\alpha_i}{h_i}x_i$ et par conséquent $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\left(1-\frac{h_n}{h_i}\right)x_i=0$. Comme par hypothèse $\frac{h_n}{h_i}\neq 1$

[1]) Cf. F. Riesz, l. c., Acta Math. 41 (1918), p. 90, Satz 12.

pour $n > i$, on voit que déjà les éléments $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ne seraient pas linéairement indépendants.

Ceci établi, soit pour tout $n = 1, 2, \dots$ E_n l'ensemble linéaire des éléments y de la forme $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$; il est donc fermé et constitue un vrai sous-ensemble de E_{n+1}. On a pour tout $y \subset E_n$ selon (30) $y - h_n U(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} h_n \alpha_i \frac{x_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i$, d'où $y - h_n U(y) \subset E_{n-1}$. En vertu du lemme, p. 83, il existe donc une suite d'éléments $\{y_n\}$ remplissant les conditions (17), p. 153.

Or, supposons, que la suite $\{h_n\}$ soit convergente. L'opération U étant totalement continue, la suite $\{U(h_n y_n)\}$ formerait donc un ensemble compact. D'autre part, on a pour $p > q$

$$(31) \quad |U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| = |y_p - [y_p - h_p U(y_p) + U(h_q y_q)]|$$

et, selon (17), $y_p \subset E_p$, ce qui implique, comme nous avons vu, que $y_p - h_p U(y_p) \subset E_{p-1}$; de même $h_q U(y_q) \subset E_q \subset E_{q-1}$, d'où, en vertu de (17) et (31), $|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| > \frac{1}{2}$ pour tout $p > q$, de sorte que la suite $\{U(h_n y_n)\}$ ne formerait pas un ensemble compact.

En raison de cette contradiction, on ne peut pas admettre qu'une suite $\{h_n\}$ de valeurs propres en question soit convergente. Elles forment donc un ensemble isolé, c. q. f. d.

§ 5. *Equations intégrales de Fredholm.*

Envisageons maintenant quelques applications des théorèmes qui viennent d'être établis.

Dans les espaces $(L^{(p)})$, aux équations de la forme $x - h\,U(x) = y$ se réduisent les ainsi dites équations intégrales de Fredholm, dont la forme générale est la suivante

$$(32) \qquad x(s) - h \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s),$$

où $K(s, t)$ remplit certaines conditions.

L'équation associée $X - h\overline{U}(X) = Y$ prend l'aspect

$$X(t) - h\int_0^1 K(s, t)\, X(s)\, ds = Y(t). \tag{33}$$

On donnera facilement l'interprétation des théorèmes qui précèdent dans le cas de ces équations intégrales.

Si $K(s, t)$ satisfait aux conditions convenables, l'opération linéaire $\int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$ est totalement continue et en conséquence les théorèmes des §§ 2, 3 et 4 de ce chapitre s'appliqueront aux équations (32) et (33). En particulier, les th. 19—21 prennent alors la forme des théorèmes dits de Fredholm (mais, bien entendu, ils subsistent aussi en dehors des équations intégrales).

§ 6. *Equations intégrales de Volterra.*

Les équations de la forme

$$x(s) - \int^s K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{34}$$

où $K(s, t)$ est une fonction *continue*, portent le nom d'équations de Volterra.

L'opération $\int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$ est alors totalement continue dans les espaces (C) et $(L^{(p)})$ où $p > 1$.

Nous allons montrer que l'équation

$$x(s) - \int^s K(s, t)\, x(t)\, dt = 0 \tag{35}$$

admet la solution unique $x(s) = 0$.

En effet, admettons que $x(s)$ remplisse cette équation; évidemment $x(s)$ est une fonction continue. Posons

$$m = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |x(s)| \quad et \quad M = \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} |K(s, t)| .$$

On a donc selon (35)

$$(36) \qquad |x(s)| \leqslant M \cdot \int_0^s |x(t)| \, dt ,$$

d'où $|x(s)| \leqslant M \cdot m \cdot s$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$, ce qui donne, en remplaçant dans (36) $x(t)$ par $M \cdot m \cdot s$, l'inégalité $|x(s)| \leqslant M^2 \cdot m \cdot \frac{s^2}{2}$. En procédant ainsi de suite, on obtient donc $|x(s)| \leqslant \frac{(M \cdot s)^n}{n!} \cdot m$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, d'où, évidemment, $x(s) = 0$.

Ceci établi, revenons sur l'équation (34). Comme pour $x \subset (C)$ et $y \subset (C)$, de même que pour $x \subset (L^{(p)})$ et $y \subset (L^{(p)})$, l'opération $\int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$ est totalement continue, l'équation (34) possède d'après le th. 14, p. 154, pour tout $y \subset (C)$, resp. $y \subset (L^{(p)})$, exactement une solution $x \subset (C)$, resp. $x \subset (L^{(p)})$.

§ 7. *Equations intégrales symétriques.*

Si l'opération $y = U(x)$ est linéaire pour x et y de $(L^{(2)})$, l'opération associée $X = \overline{U}(Y)$ peut être regardée comme linéaire pour X et Y de $(L^{(2)})$.

En effet, toute fonctionnelle linéaire dans $(L^{(2)})$ étant (cf. Chap. IV, § 4, p. 64) de la forme $\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt$ où $Y(t) \subset (L^{(2)})$, nous pouvons considérer $Y(t)$ comme représentant cette fonctionnelle.

L'opération $U(x)$ s'appelle *symétrique*, lorsque

$$(37) \quad \int_0^1 y\, U(x)\, dt = \int_0^1 x\, U(y)\, dt \quad pour \quad x \subset (L^{(2)}) \quad et \quad y \subset (L^{(2)}).$$

Comme $\int\limits_0^1 y\, U(x)\, dt = \int\limits_0^1 x\, \overline{U}(y)\, dt$, *toute opération symétrique coïncide avec son opération associée.*

Lorsque la fonction $K(s, t)$ est symétrique (c. à d. que l'on a partout $K(s, t) = K(t, s)$) et en outre l'intégrale double $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K(s, t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt$ existe pour tous $x \subset (L^{(2)})$ et $y \subset (L^{(2)})$, les opérations

$$
(38) \qquad \begin{aligned} U(x) &= \int\limits_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s), \\ V(x) &= x(s) - h \int\limits_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s) \end{aligned}
$$

sont des opérations linéaires et symétriques, car elles remplissent la condition (37).

Les équations de la forme (38) portent le nom d'*équations intégrales symétriques.*

Théorème 23. *Si l'opération $U(x)$ est symétrique, la valeur du paramètre h de l'opération de la forme $x - h\, U(x) = y$ est régulière, lorsque cette opération admet l'opération inverse continue ou bien lorsque cette équation est soluble pour tout y.*

La démonstration résulte des th. 3 et 4, p. 148, à la suite du fait que l'équation en question est dans ces conditions identique à l'équation associée.

CHAPITRE XI.

Isométrie, équivalence, isomorphie.

§ 1. *Isométrie.*

Soient E et E_1 des espaces métriques (v. Introduction, § 7, p. 8) et $y = U(x)$, où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, une opération biunivoque transformant E en E_1 tout entier. On dit que cette transformation est *isométrique*, lorsqu'elle n'altère pas la distance, c. à d. lorsqu'on a

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ où } y_1 = U(x_1) \text{ et } y_2 = U(x_2)$$

pour tout couple x_1, x_2 d'éléments de E.

Si E et E_1 sont des espaces vectoriels et normés, nous disons que la transformation de E en E_1 donnée par l'opération $y = U(x)$ est *linéaire*, lorsque l'opération $U(x)$ est linéaire.

Les espaces vectoriels normés étant des espaces métriques (cf. Chap. IV, § 1, p. 53), on peut considérer aussi les transformations isométriques de ces espaces l'un en l'autre.

§ 2. *Les espaces (L^2) et (l^2).*

Théorème 1. *Les espaces (L^2) et (l^2) sont isométriques.*

Démonstration. Soit, en effet, $\{x_i(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ une suite quelconque orthogonale, normée et complète. Si $x \subset (L^2)$, on a, comme on sait,

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt \right]^2 = \int_0^1 x^2(t)\, dt\,.$$

En désignant donc par $U(x)$ la suite $y = \{\eta_i\}$ où $\eta_i = \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt$,

on a en vertu de (1) $y \subset (l^2)$ et $|U(x)| = |x|$. Comme additive et n'altérant pas la norme, l'opération $y = U(x)$ est linéaire. Or, on sait de la théorie des séries orthogonales qu'il existe pour tout $y \subset (l^2)$ une et une seule fonction $x(t) \subset (L^2)$ telle que $y = U(x)$.

Ainsi l'opération linéaire $y = U(x)$ transforme (L^2) en (l^2) d'une façon biunivoque et sans altérer la norme, donc la distance. Les espaces (L^2) et (l^2) sont par conséquent isométriques.

Remarque. Nous verrons dans la suite que les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ ne sont isométriques que dans le cas où $p = q = 2$. C'est une conséquence du corollaire (Chap. XII, § 3), p. 206.

§ **3.** *Transformations isométriques des espaces vectoriels normés.*

Théorème 2. *Toute transformation isométrique $U(x)$ d'un espace vectoriel normé en un autre, telle que $U(\Theta) = \Theta$, est linéaire*[1]).

Démonstration. Soit d'abord E un espace (D) arbitraire et x_1, x_2 un couple quelconque de points de E.

Désignons par H_1 l'ensemble des points $x \subset E$ tels que

$$(x, x_1) = (x, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \tag{2}$$

et, pour $n = 2, 3, \ldots$, par H_n l'ensemble des points $x \subset H_{n-1}$ assujettis pour tout $z \subset H_{n-1}$ à l'inégalité

$$(x, z) \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1}), \tag{3}$$

où $\delta(H_{n-1})$ désigne le *diamètre* de l'ensemble H_{n-1}, c. à d. la borne supérieure des distances de ses points.

La suite $\{H_n\}$ étant ainsi définie, on a

$$\lim_{n\to\infty} \delta(H_n) = 0\,. \tag{4}$$

[1]) Ce théorème a été établi par MM. S. Mazur et S. Ulam (v. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. 194, Paris 1932, p. 946—948).

En effet, si les ensembles H_n ne sont pas vides, on a pour tout couple x', x'' de points de H_n: $x'' \subset H_{n-1}$ (puisque par définition $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$), donc, en vertu de (3), $(x', x'') \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$, par conséquent $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$, d'où $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\delta(H_1)$, et d'autre part, on a en vertu de (2), pour tout couple x', x'' de points de H_1 l'inégalité $(x', x'') \leqslant (x', x_1) + (x'', x_1) = (x_1, x_2)$, donc $\delta(H_1) \leqslant (x_1, x_2)$ et par conséquent $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(x_1, x_2)$, d'où l'égalité (4).

Il en résulte que la partie commune des ensembles H_n (lorsqu'elle n'est pas vide) se réduit à un point. Nous appellerons ce point le *centre* du couple x_1, x_2.

Ceci dit, soit E un espace vectoriel normé. Pour tous deux points x' et x'' de E on a donc

$$(x', x'') = |x' - x''|.$$

Posons $\overline{x} = x_1 + x_2 - x$ pour $x \subset E$. On voit aisément par induction que

(5) $\quad x \subset H_n$ *entraîne* $\overline{x} \subset H_n$ *pour tout* $n = 1, 2, \ldots$

En effet, si $x \subset H_1$, on a $|\overline{x} - x_1| = |x - x_2|$ et $|\overline{x} - x_2| = |x - x_1|$, donc $|\overline{x} - x_1| = |\overline{x} - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$, d'où selon (2) $\overline{x} \subset H_1$ et, en admettant que la relation (5) est vraie pour $n-1$, on a en conséquence pour $x' \subset H_{n-1}$ $x_1 + x_2 - x' \subset H_{n-1}$. Si $x \subset H_n$, on a donc selon (3) $|\overline{x} - x'| = |(x_1 + x_2 - x') - x| \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$, d'où $\overline{x} \subset H_n$.

Nous allons montrer que le point $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ est le centre du couple x_1, x_2. On a, en effet, $\xi \subset H_1$, car $|x_1 - \xi| = |x_2 - \xi| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$. Admettons donc que $\xi \subset H_{n-1}$. Pour tout $x \subset H_{n-1}$ on a en vertu de (5) $x_1 + x_2 - x = \overline{x} \subset H_{n-1}$ et comme $2|\xi - x| = |x_1 + x_2 - 2x| = |x - \overline{x}| \leqslant \delta(H_{n-1})$, on conclut que $|\xi - x| \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$, d'où $\xi \subset H_n$. Comme appartenant à H_n pour tout n naturel, le point ξ est donc le centre de x_1, x_2.

Ceci établi, soit E_1 également un espace vectoriel normé et $y = U(x)$, où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, une opération isométrique transformant E en E_1 tout entier de façon que $U(\Theta) = \Theta$. La notion de centre étant définie d'une façon métrique, on aperçoit facilement que le centre du couple quelconque x_1, x_2 de points de E se trouvera transformé en centre du couple $U(x_1), U(x_2)$ de E_1. On a donc

$$U\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right] = \frac{1}{2}[U(x_1) + U(x_2)] \quad \textit{pour } x_1 \subset E \quad \textit{et} \quad x_2 \subset E,$$

d'où, en posant $x_1 = x$ et $x_2 = \Theta$, on obtient par suite de l'hypothèse que $U(\Theta) = \Theta$:

$$U\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}U(x) \quad \textit{pour tout } x \subset E.$$

Il en résulte pour des points arbitraires x_1 et x_2 de E que:

$$U(x_1 + x_2) = U\left[\frac{1}{2}(2x_1 + 2x_2)\right] = \frac{1}{2}U(2x_1) + \frac{1}{2}U(2x_2) =$$
$$= U(x_1) + U(x_2).$$

Ainsi l'opération $U(x)$ est additive et, par suite de sa continuité, linéaire. Il en est donc de même de la transformation $y = U(x)$, c. q. f. d.

§ 4. *Espace des fonctions réelles continues.*

Etant donné un ensemble quelconque Q métrique, complet et compact (cf. Introduction, § 7, p. 9), on peut considérer l'ensemble E des fonctions réelles continues $x(q)$ définies pour $q \subset Q$ comme un espace du type (B), si l'on définit dans E de la façon usuelle l'addition et la multiplication par nombres et choisit comme norme le maximum du module de la fonction.

Lemme. *Soit $x(q) \subset E$ où $q \subset Q$. Pour qu'on ait pour un élément donné $q_0 \subset Q$ l'inégalité*

$$(6) \qquad |x(q_0)| > |x(q)| \quad \textit{pour tout} \quad q \neq q_0,$$

il faut et il suffit que

$$(7) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\| x+hz \| - \| x \|}{h}$$

existe pour tout $z(q) \subset E$.

En outre, si la fonction $x(q)$ *satisfait à l'inégalité* (6), *on a:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| x+hz \| - \| x \|}{h} = z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) \quad \textit{pour tout} \quad z(q) \subset E.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, on a $\| x \| = | x(q_0) |$ et comme la fonction continue $| x+hz |$ atteint son maximum, on obtient

$$(8) \qquad | x(q_0) + hz(q_0) | - | x(q_0) | \leqslant \| x+hz \| - \| x \| = \\ = | x(q_h) + hz(q_h) | - | x(q_0) |,$$

où q_h est un point dépendant de h et appartenant à Q. Or, on tire de (8) $| x(q_0) + hz(q_0) | \leqslant | x(q_h) + hz(q_h) |$ et par conséquent $0 \leqslant | x(q_0) | - | x(q_h) | \leqslant | h | \cdot | z(q_0) | + | h | \cdot | z(q_h) | \leqslant 2 | h | \cdot \| z \|$, d'où $\lim_{h\to 0} | x(q_h) | = | x(q_0) |$. Il en résulte par suite de la compacticité de Q que

$$(9) \qquad \lim_{h\to 0} q_h = q_0 .$$

Ceci établi, examinons d'abord le cas où $x(q_0) > 0$. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait pour $| h | < \varepsilon$ l'égalité

$$| x(q_0) + hz(q_0) | - | x(q_0) | = x(q_0) + hz(q_0) - x(q_0) = hz(q_0)$$

et, en vertu de (9),

$$| x(q_h) + hz(q_h) | - | x(q_0) | = x(q_h) + hz(q_h) - x(q_0) \leqslant hz(q_h),$$

d'où, selon (8), $hz(q_0) \leqslant \| x+hz \| - \| x \| \leqslant hz(q_h)$ et par conséquent, encore en raison de (9) et par suite de la continuité de $z(q)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| x+hz \| - \| x \|}{h} = z(q_0) .$$

Dans le cas où $x(q_0) < 0$ on obtiendrait, en procédant d'une façon analogue,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|x+hz\|-\|x\|}{} = -z(q_0).$$

Nous avons ainsi démontré la nécessité de la condition (l'existence de la limite (7)) et, en même temps, la deuxième partie du lemme.

Pour montrer que la condition est suffisante, supposons que le module de la fonction $x(q)$ atteigne son maximum dans deux points distincts q_0 et q_1 de Q, c. à d. que

$$|x(q_0)| = |x(q_1)| \geqslant |x(q)| \quad pour\ tout\ q \subset Q.$$

Dans le cas où $x(q_0) > 0$ posons $z(q) = (q, q_1)$. Il vient: $\|x+hz\| - \|x\| \geqslant x(q_0) + h(q_0, q_1) - x(q_0)$, d'où

$$\text{(10)} \qquad \liminf_{h\to+0} \frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h} \geqslant (q_0, q_1) > 0.$$

On a en même temps $\|x+hz\| - \|x\| \geqslant |x(q_1) + h(q_1, q_1)| - - |x(q_1)| = 0$, d'où

$$\text{(11)} \qquad \limsup \frac{\|x+hz\|-\|x\|}{} \leqslant 0,$$

et les inégalités (10) et (11) montrent l'impossibilité de l'existence de la limite (7).

Dans le cas où $x(q_0) < 0$ on parviendrait, en posant $z = -(q, q_1)$, à la même conclusion, c. q. f. d.

On appelle deux ensembles *homéomorphes*, lorsqu'il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'un en l'autre.

Théorème 3. *Pour que deux ensembles métriques, complets et compacts Q et Q_1 soient homéomorphes, il faut et il suffit que les espaces E et E_1 des fonctions réelles continues définies dans ces ensembles soient isométriques.*

Démonstration. Necessité. On vérifie facilement que, $f(q)$, où $q \subset Q$ et $q' \subset Q_1$, désignant une transformation biunique et bicontinue de Q en Q_1 tout entier, la transformation

de E_1 en E qui fait correspondre à toute fonction $y(q') \subset E_1$ la fonction $x(q) = y[f(q)] \subset E$ est isométrique.

Suffisance. Les espaces E et E_1 étant supposés isométriques, soit $y = V(x)$ l'opération biunivoque qui transforme E en E_1 tout entier, en faisant correspondre à toute fonction $x(q) \subset E$ la fonction $y(q') \subset E_1$ de façon que $\| V(x_1) - V(x_2) \| = \| x_1 - x_2 \|$ pour tous x_1 et x_2 de E.

En posant $U(x) = V(x) - V(\Theta)$, on aperçoit aisément que l'opération $U(x)$ jouit exactement des mêmes propriétés et qu'on a en outre $U(\Theta) = \Theta$. En vertu du th. 2, p. 166, l'opération $y = U(x)$ est donc linéaire.

Soit q_0 un point donné de Q et $x(q) \subset E$ où $q \subset Q$ une fonction satisfaisant à l'inégalité (6) du lemme, p. 168. Comme l'opération $y = U(x)$ n'altère pas la norme, on a pour tout nombre h, en posant $U(z) = t$ où $z \subset E$:

$$\frac{\| x + hz \| - \| x \|}{h} = \frac{\| y + ht \| - \| y \|}{h},$$

d'où, en vertu du lemme précédent,

$$z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) = \lim \frac{\| y + ht \| - \| y \|}{h}. \tag{12}$$

Or, comme l'opération $U(z)$ transforme E en E_1 tout entier, la limite (12) existe pour tout $t \subset E_1$. Il existe par conséquent, en vertu du lemme, un $q'_0 \subset Q_1$ tel que $|y(q'_0)| > |y(q')|$ pour tout point $q' \neq q'_0$ de Q_1 et que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| y + ht \| - \| y \|}{h} = t(q'_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0) \quad \textit{pour tout } t \subset E_1 .$$

On en conclut en vertu de (12) que $z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) = t(q'_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0)$, d'où, en posant $\varepsilon(q'_0) = \operatorname{sign} x(q_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0)$, on obtient la relation suivante entre $q_0 \subset Q$ et $q'_0 \subset Q_1$:

$$t(q'_0) = z(q_0) \cdot \varepsilon(q'_0) \quad \textit{où} \quad |\varepsilon(q'_0)| = 1 \tag{13}$$

et qui subsiste pour tout $z \subset E$ et $t = U(z)$.

Envisageons donc la fonction

$$q'_0 = f(q_0),$$

qui transforme Q en Q_1.

Cette transformation est *biunivoque*. En effet, l'égalité $q'_1 = q'_2$ où $q'_1 = f(q_1)$ et $q'_2 = f(q_2)$ donne en vertu de (13) $|z(q_1)| = |z(q_2)|$ pour toute fonction $z \subset E$, ce qui entraîne l'égalité $q_1 = q_2$, puisqu'elle se présente en particulier pour la fonction $z(q) = (q, q_1)$.

La fonction f transforme en outre Q en Q_1 *tout entier*. En effet, quel que soit $\overline{q'} \subset Q_1$, on a d'après (13), en posant $t(q') = \dfrac{1}{1+(q', \overline{q'})}$,

$$(14) \qquad |z(q_0)| = \frac{1}{1+(q'_0, \overline{q'})} \quad \textit{pour tout } q_0 \subset Q.$$

Or, comme $\|z\| = \|t\| = 1$, il existe un $q_0 \subset Q$ tel que $|z(q_0)| = 1$. Pour le point $q'_0 = f(q_0)$ on a donc, selon (14), $\dfrac{1}{1+(q'_0, \overline{q'})} = 1$, d'où $(q'_0, \overline{q'}) = 0$ et par conséquent $\overline{q'} = q'_0$.

Enfin, la transformation f est *continue*. En effet, soit $q_0 = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$ et $q'_n = f(q_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il vient, selon (13), $\lim\limits_{n\to\infty} |t(q'_n)| = |t(q'_0)|$ pour tout $t \subset E_1$, d'où en particulier pour $t(q') = (q', q'_0)$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} (q'_n, q'_0) = (q'_0, q'_0) = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} q'_n = q'_0$.

Il en résulte par suite de la compacticité de Q et Q_1 que ces ensembles sont homéomorphes, c. q. f. d.

Remarque. On voit de cette démonstration que si l'opération $y = U(x)$ transforme l'espace E en espace E_1 d'une façon isométrique et si $U(\Theta) = \Theta$, il existe une fonction $q' = f(q)$ transformant l'ensemble Q en Q_1 par homéomorphie et une fonction continue $\varepsilon(q')$ telle que

$$y(q') = x[f^{-1}(q')] \cdot \varepsilon(q') \quad \textit{où} \quad y = U(x) \quad \textit{et} \quad |\varepsilon(q')| = 1.$$

Applications. Le th. 3 qui précède implique en particulier que l'espace (C) des fonctions continues $x(t)$ définies pour $0 \leqslant t \leqslant 1$

n'est pas isométrique avec celui des fonctions continues $x(u, v)$ de deux variables u et v, définies dans le carré $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Cependant l'espace $(L^{(p)})$ des fonctions à p-ième puissance sommable définies dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ est isométrique avec celui des fonctions à p-ième puissance sommable définies dans le carré $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. Il existe, en effet, une fonction biunivoque $t = \varphi(u, v)$ qui transforme ce carré (sauf un ensemble de mesure nulle) en intervalle [0,1] (encore sauf un ensemble de mesure nulle) de manière que les ensembles mesurables se trouvent transformés en ensembles de mesure égale.

En faisant donc correspondre à toute fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$ la fonction $y(u, v) = x[\varphi(u, v)]$, on obtient une transformation des deux espaces fonctionnels l'un en l'autre qui, comme il est facile de voir, n'altère pas les distances.

§ 5. *Rotations.*

Nous appelons *rotation* d'un espace E du type (B) *autour du point* $x_0 \subset E$ toute transformation biunivoque et isométrique de E en E tout entier qui en transforme le point x_0 en x_0.

En vertu du th. 2, p. 166, toute rotation autour de Θ est une transformation linéaire.

Nous allons étudier les rotations dans quelques cas particuliers des espaces du type (B).

Espace (C). *La rotation la plus générale dans* (C) *autour de* Θ *est donnée par l'opération de la forme*

$$y(t) = \varepsilon \cdot x[\alpha(t)],$$

où $x(t) \subset (C)$, $\varepsilon = +1$ *ou* -1 *indépendamment de* $x(t)$ *et* $\alpha(t)$ *est une fonction arbitrairement choisie qui transforme l'intervalle fermé* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *en lui-même d'une façon biunivoque.*

La démonstration résulte de la remarque, p. 172, en tenant compte du fait que, $\varepsilon(t)$ étant une fonction continue telle que $|\varepsilon(t)| = 1$, on a $\varepsilon(t) = \text{const.}$

Espace (c). Nous pouvons considérer cet espace comme celui des fonctions continues définies dans un ensemble borné et fermé de nombres réels ayant un seul point d'accumulation. En vertu de la remarque, p. 172, on en déduit facilement le théorème suivant.

La rotation la plus générale dans (c) autour de Θ *est donnée par l'opération* $y = U(x)$ *où*

$$x = \{\xi_n\} \subset (c),\; y = \{\eta_n\} \subset (c) \quad et \quad \eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)},$$

$\{\varepsilon_n\}$ *désignant une suite convergente quelconque telle que* $|\varepsilon_n| = 1$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$ *et* $\varphi(n)$ *une fonction arbitrairement choisie qui transforme d'une manière biunivoque l'ensemble des nombres naturels en lui-même.*

Espace (L^2). *Toute rotation de* (L^2) *autour de* Θ *est de la forme*

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt, \tag{15}$$

où $x(t) \subset (L^2)$ *et* $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\}$ *sont des suites arbitraires, complètes dans* (L^2), *de fonctions orthogonales normées définies pour* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Démonstration. On a d'après (15)

$$\int_0^1 y^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt\right]^2 = \int_0^1 x^2(t)\, dt,$$

d'où $\|y\| = \|x\|$. Toute transformation de la forme (15) est donc en effet une rotation autour de Θ.

Réciproquement, soient: $y = U(x)$ une rotation autour de Θ donnée dans (L^2) et $\{\alpha_n(t)\}$ une suite quelconque, complète dans (L^2), orthogonale et normée. En posant $\beta_n(t) = U[\alpha_n(t)]$ où $n = 1, 2, \ldots$, on a donc

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t)\, x(t)\, dt$$

et par conséquent $y(t) = U[x(t)]$ est de la forme (15). De plus,

$$(16) \qquad \int_0^1 \beta_n^2(t)\,dt = \int_0^1 U^2[\alpha_n(t)]\,dt = \int_0^1 \alpha_n^2(t)\,dt = 1$$

et comme $\beta_i(t) + \beta_j(t) = U[\alpha_i(t) + \alpha_j(t)]$, on a pour $i \neq j$

$$\int_0^1 [\beta_i(t) + \beta_j(t)]^2\,dt = \int_0^1 [\alpha_i(t) + \alpha_j(t)]^2\,dt = 2,$$

d'où en vertu de (16)

$$(17) \qquad \int_0^1 \beta_i(t)\,\beta_j(t)\,dt = 0 \quad \textit{pour } i \neq j.$$

En conséquence, si pour une fonction $\beta(t) \subset (L^2)$ on a $\int_0^1 \beta_n(t)\,\beta(t)\,dt = 0$, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, on aura d'après (15) $\int_0^1 y(t)\,\beta(t)\,dt = 0$ pour toute fonction $y(t) \subset (L^2)$, de sorte que $\beta(t) = 0$. Il en résulte en vertu de (16) et (17) que $\{\beta_n(t)\}$ est une suite complète dans (L^2) de fonctions orthogonales et normées.

Espace (l^2). On peut énoncer pour (l^2) un théorème tout à fait analogue. C'est une conséquence de l'isométrie des espaces (L^2) et (l^2) (v. th. 1, p. 165).

Espaces $(L^{(p)})$ *et* $(l^{(p)})$ *où* $1 \leqslant p \neq 2$. On a les lemmes suivants:

1. *Etant donnée une rotation* $y = U(x)$ *de* $(L^{(p)})$, *où* $1 \leqslant p \neq 2$, *autour de* Θ, *si on a pour un couple* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *de fonctions appartenant à* $L((^{p}))$

$$(18) \qquad x_1(t) \cdot x_2(t) = 0 \quad \textit{presque partout dans } [0,1],$$

alors pour le couple $y_1(t)$, $y_2(t)$, *où* $y_1 = U(x_1)$ *et* $y_2 = U(x_2)$, *on a également*

$$(19) \qquad y_1(t) \cdot y_2(t) = 0 \quad \textit{presque partout dans } [0,1].$$

Démonstration. Pour tout couple de nombres α, β on a par hypothèse, d'après (18), $\|\alpha x_1 + \beta x_2\|^p = |\alpha|^p \cdot \|x_1\|^p + |\beta|^p \cdot \|x_2\|^p$,

d'où par définition de y_1 et y_2 il vient $\|\alpha y_1 + \beta y_2\|^p = |\alpha|^p \cdot \|y_1\|^p + |\beta|^p \cdot \|y_2\|^p$ et par conséquent

$$(20) \quad \int_0^1 |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^p \, dt = |\alpha|^p \int_0^1 |y_1(t)|^p \, dt + |\beta|^p \int_0^1 |y_2(t)|^p \, dt.$$

Dans le cas où $p = 1$, on en tire, en posant successivement $\alpha = \beta = 1$ et $\alpha = -\beta = 1$, la relation $\int_0^1 |y_1(t) + y_2(t)| \, dt = \int_0^1 |y_1(t) - y_2(t)| \, dt = \int_0^1 [|y_1(t)| + |y_2(t)|] \, dt$, qui n'est possible que lorsque la condition (19) est réalisée.

Dans le cas où $p > 2$, on obtient de la relation (20), en désignant par H l'ensemble des valeurs de $t \subset [0,1]$ pour lesquelles $y_1(t) \cdot y_2(t) \neq 0$, la relation

$$(21) \quad \int_H |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^p \, dt = |\alpha|^p \int_H |y_1(t)|^p + |\beta|^p \int_H |y_2(t)|^p \, dt,$$

qui donne, en y posant $\varphi(\alpha, t) = |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^p$, les égalités

$$(22) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = p \, |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} [\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] \cdot y_1(t)$$

et

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = p \, (p-1) \, |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-2} \cdot y_1^2(t).$$

Or, comme $|\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-1} \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ et $y_1(t) \subset (L^{(p)})$, on constate aisément l'existence de l'intégrale $\int_0^\alpha \int_H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \, d\alpha \, dt$, d'où selon (22)

$$(24) \quad \int_H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_H \varphi(\alpha, t) \, dt = p \cdot \operatorname{sign} \alpha \cdot |\alpha|^{p-1} \int_H |y_1(t)|^p \, dt$$

et par conséquent $\int_H \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} dt = 0$; il en résulte aussitôt (puisqu'on

a selon (23) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \geqslant 0$) que $\int\limits_0^\alpha \int\limits_H \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} d\alpha\, dt = \int\limits_H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} dt$, d'où selon (24) $\int\limits_H \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} dt = p(p-1) |\alpha|^{p-2} \int\limits_H |y_1(t)|^p dt$ et par conséquent selon (23)

$$(25) \qquad \int\limits_H |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-2} \cdot y_1^2(t)\, dt = |\alpha|^{p-2} \int\limits_H |y_1(t)|^p dt.$$

On tire de (25), en posant $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ l'égalité

$$(26) \qquad \int\limits_H |y_2(t)|^{p-2} \cdot |y_1(t)|^2 dt = 0,$$

ce qui entraîne par définition de H que $mH = 0$[1]).

Enfin, dans le cas où $1 < p < 2$, considérons pour $i = 1$ et 2 la fonctionnelle $Y_i(y) = \int\limits_2^1 Y_i(t)\, y(t)\, dt$ où $y(t) \subset (L^{(p)})$ et $Y_i(t) = |y_i(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} y_i(t)$. L'opération conjuguée $X = \overline{U}(Y)$ est une rotation de l'espace $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ autour de Θ[2]). Posons $X_i = \overline{U}(Y_i)$ et $X_i(x) = \int\limits_0^1 X_i(t)\, x(t)\, dt$ où $x \subset (L^{(p)})$. On a $X_i(x_i) = Y_i(y_i) = |Y_i| \cdot |y_i| = |X_i| \cdot |x_i|$, d'où en vertu de l'inégalité de Riesz $X_i(t) = 0$ pour les mêmes valeurs de t que $x_i(t) = 0$. Par conséquent $X_1(t) \cdot X_2(t) = 0$ et comme $\frac{p}{p-1} > 2$, on conclut en vertu du cas précédent que $Y_1(t) \cdot Y_2(t) = 0$, donc que $y_1(t) \cdot y_2(s) = 0$. La condition (19) se trouve ainsi démontrée.

2. *Etant donnée une rotation $y = U(x)$ de $(l^{(p)})$ où $1 \leqslant p \neq 1$ autour de Θ, si on a pour deux suites $x_1 = \{\xi_n^{(1)}\}$ et $x_2 = \{\xi_n^{(2)}\}$ appartenant à $(l^{(p)})$*

$$\xi_n^{(1)} \cdot \xi_n^{(2)} = 0 \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots,$$

[1]) mH désigne la mesure de l'ensemble H (cf. Introduction, p. 3).

[2]) Pour la démonstration de ce fait, voir plus loin celle du th. 11, p. 188.

alors pour les suites $y_1 = U(x_1) = \{\eta_n^{(1)}\}$ *et* $y_2 = U(x_2) = \{\eta_n^{(2)}\}$ *on a également*

$$\eta_n^{(1)} \cdot \eta_n^{(2)} = 0 \quad pour \ n = 1, 2, \ldots$$

La démonstration est analogue à celle du lemme précédent pour les espaces $(L^{(p)})$, les modifications à apporter étant évidentes.

Les deux lemmes donnent respectivement les théorèmes suivants sur la forme générale des rotations.

I. *Etant donnée une rotation* $y = U(x)$ *de l'espace* $(L^{(p)})$, *où* $1 \leqslant p \neq 2$, *autour de* Θ, *il existe deux fonctions* $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *définies pour* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *et telles que les conditions suivantes soient remplies:*

(a) la fonction $\varphi(t)$ *transforme biunivoquement l'intervalle fermé* [0,1] *presque entier en même intervalle presque entier de façon que les ensembles mesurables se trouvent transformés en ensembles mesurables et réciproquement,*

(b) on a pour presque tout $t \subset [0,1]$

$$\psi(t) = \left[\lim_{h \to +0} \frac{m\, I[t, t+h]}{h}\right]^{\frac{1}{p}}$$

où $I[t, t+h]$ *désigne l'image de l'intervalle fermé* $[t, t+h]$ *donnée par la fonction* φ *(c. à d. l'ensemble des points* $\varphi(s)$ *pour* $t \leqslant s \leqslant t+h$,

(c) on a pour tout $x \subset (L^{(p)})$

$$y(t) = x[\varphi(t)] \cdot \psi(t)$$

où $y(t) = U[x(t)]$.

Réciproquement, si $\varphi(t)$ *est une fonction satisfaisant à la condition (a), il existe une fonction* $\psi(t)$ *définie par (b) et l'opération* $y = U(x)$ *définie par (c) est une rotation de* $(L^{(p)})$ *autour de* Θ [1].

II. *Etant donnée une rotation quelconque* $y = U(x)$ *de l'espace* $(l^{(p)})$ *où* $1 \leqslant p \neq 2$ *autour de* Θ, *il existe une fonction* $\varphi(n)$ *et une suite de nombres* $\{\varepsilon_n\}$ *telles que*

[1] Pour la démonstration de ce théorème voir S. Banach, *Sur les rotations dans les champs des fonctions intégrables avec p-ième puissance*, **Studia Mathematica IV** (à paraître).

(a) la fonction $\varphi(n)$ transforme l'ensemble des nombres naturels tout entier en lui-même d'une manière biunivoque,

(b) on a $|\varepsilon_n| = 1$ pour $n = 1, 2, \dots$,

(c) on a pour tout couple de suites $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$ et $y = \{\eta_n\} \subset (l^{(p)})$ où $y = U(x)$

$$\eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)} \quad pour \ n = 1, 2, \dots$$

Réciproquement, pour $\varphi(n)$ et $\{\varepsilon_n\}$ quelconques satisfaisant aux conditions (a) et (b), l'opération $y = U(x)$ définie par la condition (c) est une rotation.

Démonstration. Soit d'abord $y = U(x)$ une rotation de $(l^{(p)})$ autour de Θ. Posons

$$\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & pour \ i = n \\ 0 & pour \ i \neq n \end{cases} \tag{27}$$

et $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$ pour $i = 1, 2, \dots$ On a évidemment pour tout $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i. \tag{28}$$

En posant $y_i = U(x_i) = \{\eta_n^{(i)}\}$, on a donc en vertu de (28) pour $y = U(x) = \{\eta_n\}$ l'égalité $y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$, d'où

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^{(i)} \quad pour \ n = 1, 2, \tag{29}$$

Selon (27) on a $\xi_n^{(i)} \cdot \xi_n^{(j)} = 0$, lorsque $i \neq j$; on en conclut en vertu du lemme, p. 177, 2, que

$$\eta_n^{(i)} \cdot \eta_n^{(j)} = 0 \quad pour \ i \neq j \quad et \quad n = 1, 2, \dots \tag{30}$$

Comme y peut être une suite quelconque appartenant à $(l^{(p)})$, il n'existe en vertu de (29) et (30) pour tout n naturel qu'un seul nombre $\varphi(n)$ tel que $\eta_n^{\varphi(n)} \neq 0$. Il en résulte d'après (29) que l'on a

(31) $\eta_n = \xi_{\varphi(n)} \cdot \varepsilon_n$ *pour* $\varepsilon_n = \eta_n^{\varphi(n)}$ *et* $n = 1, 2, \ldots,$

ce qui réalise la condition (c).

D'autre part, $n_1 \neq n_2$ entraîne $\varphi(n_1) \neq \varphi(n_2)$, car dans le cas contraire on aurait selon (31) pour toute suite $\{\eta_n\} \subset (l^{(p)})$ l'égalité $\varepsilon_{n_2} \eta_{n_1} - \varepsilon_{n_1} \eta_{n_2} = 0$ qui est impossible; et s'il existait un n_0 naturel tel qu'on ait $\varphi(n) \neq n_0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on aurait selon (31) pour la suite $x = \{\xi_n\}$ où

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad n = n_0 \\ 0 & \textit{pour} \quad n \neq n_0 \end{cases}$$

l'égalité $\eta_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, ce qui est aussi impossible. Ainsi la condition (a) se trouve également démontrée.

Enfin, on a par définition de la rotation: $|y| = |x|$, ce qui donne en vertu de (31)

(32) $$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{\varphi(n)}|^p \cdot |\varepsilon_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \quad \textit{pour tout} \quad x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)}).$$

En conséquence, si on choisit, pour tout n_0 naturel arbitrairement donné, la suite $x = \{\xi_n\}$ de façon à avoir

$$\xi_{\varphi(n)} = \begin{cases} 1 & \textit{pour} \quad n = n_0 \\ 0 & \textit{pour} \quad n \neq n_0, \end{cases}$$

on obtient de (32) $|\varepsilon_{n_0}|^p = 1$, d'où $|\varepsilon_{n_0}| = 1$, ce qui prouve la condition (b).

La réciproque est évidente.

§ 6. *Isomorphie et équivalence.*

Deux espaces E et E_1 du type (F) s'appellent *isomorphes,* lorsqu'il existe une opération biunivoque et linéaire qui transforme E en E_1 tout entier.

Soit $y = U(x)$, où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, cette opération; en vertu du th. 5 (Chap. III, § 3), p. 41, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est également linéaire, de sorte que l'opération $y = U(x)$ transforme E en E_1 d'une manière bicontinue.

Les espaces E et E_1 sont dits *équivalents,* lorsqu'il existe une opération biunivoque et linéaire $y = U(x)$ qui transforme E en E_1 de façon que $|y| = |x|$ pour tout $x \subset E$.

L'équivalence de deux espaces en entraîne par conséquent l'isomorphie, mais, comme nous le verrons, la réciproque n'est pas vraie.

Considérons deux exemples.

1°. Soit (c_0) l'espace des suites de nombres réels convergentes vers 0. On a le théorème:

Les espaces (c) et (c_0) sont isomorphes.

En effet, en posant pour $x = \{\xi_i\} \subset (c)$

$$\eta_1 = \lim_{i\to\infty} \xi_i \quad et \quad \eta_i = \xi_{i-1} - \eta_1 \quad pour \quad i > 1,$$

on a évidemment $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$, d'où, en posant $y = \{\eta_i\}$, on a $y \subset (c_0)$ et il est facile de voir que l'opération $y = U(x)$ ainsi définie est additive et remplit la condition $|U(x)| \leqslant 2|x|$; elle est donc linéaire.

Réciproquement, si $y = \{\eta_i\} \subset (c_0)$, on n'a qu'à poser pour $x = \{\xi_i\}$

$$\xi_i = \eta_{i+1} + \eta_1 \quad où \quad i = 1, 2, \ldots,$$

pour obtenir $x \subset (c)$, puisque $\lim_{i\to\infty} \xi_i = \eta_1$, et pour voir que $y = 0$ entraîne $x = 0$.

L'opération $y = U(x)$ est donc linéaire et détermine une transformation biunivoque de (c) en (c_0).

2°. *Les espaces des fonctionnelles linéaires définies dans*

$$(L^{(p)}),\ (l^{(p)}) \quad où \quad p > 1,\ (L),\ (l) \quad et \quad (c)$$

sont équivalents respectivement aux espaces

$$(L^{(q)}),\ (l^{(q)}) \quad où \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ (M),\ (m) \quad et \quad (l).$$

Ce n'est qu'une autre façon de formuler les théorèmes sur la forme générale des fonctionnelles linéaires établis au Chap. IV, § 4 (voir p. 61—68).

Le th. 2, p. 166, implique immédiatement le

Théorème 4. *Les espaces E et E_1 du type (B) qui sont isométriques sont équivalents.*

§ 7. *Produits des espaces du type (B).*

Etant donnés deux espaces E et E_1 du type (B), désignons par $E \times E_1$ l'espace que constitue l'ensemble de tous les couples

ordonnés x, y où $x \subset E$ et $y \subset E_1$, lorsqu'on y définit l'addition et la multiplication par nombres, en posant

$$x,y + x',y' = x + x',\ y + y' \quad et \quad h\ x,y = hx,\ hy$$

(bien entendu, où $x' \subset E$, $y' \subset E_1$ et h étant un nombre) et en y définissant la norme de façon que la condition suivante soit remplie:

$$(33) \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \textit{et} \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \ \textit{équivaut à} \lim_{n\to\infty} \| x_n, y_n - x_0, y_0 \| = 0.$$

Ainsi défini, l'espace $E \times E_1$ est également du type (B). Nous l'appellerons *produit* des espaces E et E_1.

Il est aisé de voir que la condition (33) se trouvera remplie, si on admet en particulier comme norme du couple $z = x, y$ l'une ou l'autre des expressions

1) $\| z \| = [\| x \|^p + \| y \|]^{\frac{1}{p}}$ où $p \geqslant 1$,

2) $\| z \| = \max [\| x \|,\ \| y \|]$

et qu'elles ne sont pas les seules convenables pour remplir cette condition. Or, on aperçoit aussitôt qu'en choisissant des normes quelconques, pourvu qu'elles soient conformes à la conditions (33), on obtiendra toujours des espaces isomorphes.

Pour mettre en évidence quelle norme a été adoptée, convenons de désigner le produit des espaces E et E_1 dans le cas de la norme 1) par $(E \times E_1)_{l^p}$ et dans celui de la norme 2) par $(E \times E_1)_m$.

On définit de la même façon le produit d'un nombre fini d'espaces $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ du type (B). Il est évident que *le produit des espaces séparables est un espace séparable.*

Le produit $E \times E$ portera le nom du *carré de E* et sera désigné par E^2.

Théorème 5. *Les espaces $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ et (c) sont isomorphes respectivement avec leur carré.*

Démonstration. Il suffit de faire correspondre à toute fonction $x(t) \subset (L^{(p)})$ le couple des fonctions $x_1(t), x_2(t)$ définies par les formules

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \quad et \quad x_2(t) = x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right) \quad où \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

pour avoir une transformation biunivoque et linéaire de $(L^{(p)})$ en $(L^{(p)})^2$.

De même, il suffit de faire correspondre à toute suite $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$ le couple de suites $x_1 = \{\eta_n\}, x_2 = \{\zeta_n\}$ définies par les formules

$$\eta_n = \xi_{2n} \quad et \quad \zeta_n = \xi_{2n-1} \quad où \quad n = 1, 2, \ldots,$$

pour que l'espace $(l^{(p)})$ se trouve transformé en $(l^{(p)})^2$ d'une manière biunivoque et linéaire.

Enfin, faisons correspondre à toute suite $x = \{\xi_n\} \subset (c)$ le couple $x_1 = \{\eta_n\}, x_2 = \{\zeta_n\}$ défini par les formules

$$\eta_n = \xi_{2n} - \xi_1 \quad et \quad \zeta_n = \xi_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} \xi_n + \xi_1 \quad où \quad n = 1, 2, \ldots$$

Il vient

$$\xi_1 = \lim_{n\to\infty} \zeta_n, \; \xi_{2n} = \eta_n + \lim_{n\to\infty} \zeta_n \quad et \quad \xi_{2n+1} = \zeta_n + \lim_{n\to\infty} \eta_n \quad où \quad n = 1, 2, \ldots$$

et on voit que c'est une transformation biunivoque et linéaire de (c) en $(c)^2$.

Théorème 6. *L'espace (C) est isomorphe avec le produit $(C) \times (c)$* [1].

Démonstration. Désignons par E le sous-espace de (C) formé de fonctions $x(t) \subset (C)$ qui satisfont à la condition

$$x\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad pour \quad n = 1, 2, \ldots$$

Construisons pour toute fonction $x(t) \subset (C)$ une fonction $\bar{x}(t) \subset (C)$ telle que $\bar{x}\left(\frac{1}{n}\right) = x\left(\frac{1}{n}\right)$ et qui soit linéaire dans les intervalles $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ pour tout n naturel.

Faisons correspondre à tout $x(t) \subset (C)$ le couple (formé d'une fonction et d'une suite de nombres)

[1]) Ce théorème a été établi par M. K. Borsuk.

$$y(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \quad où \quad y(t) = x(t) - \bar{x}(t).$$

On a évidemment $y(t) \subset E$ et $\left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \subset (c)$.

Il est facile de voir que la transformation établie par cette correspondance est linéaire.

On aperçoit également que pour tout couple $y(t), \{\xi_n\} \subset E \times (c)$ il existe une fonction continue $x(t)$ telle que $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ et $\xi_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n = 1, 2, \dots$, de sorte que la transformation considérée est biunivoque et épuise les espaces (C) et $E \times (c)$ entièrement. Ces deux espaces sont donc isomorphes.

Il en résulte l'isomorphie des espaces $(C) \times (c)$ et $E \times (c) \times (c) = E \times (c)^2$. Or, $(c)^2$ étant (selon le th. 5 qui précède) isomorphe avec (c), l'espace $(C) \times (c)$ est isomorphe avec $E \times (c)$, donc avec (C), c. q. f. d.

Théorème 7. *L'espace (C) est isomorphe avec chacun des espaces $(C^{(p)})$ où $p = 1, 2, \dots$*[1].

Démonstration. Faisons correspondre à toute fonction $x(t) \subset (C^{(p)})$ (cf. Introduction, § 7, p. 11, 7) le couple formé de la fonction $y(t) = x^{(p)}(t)$ et du système de p nombres: $x(0), x'(0), \dots, x^{(p-1)}(0)$: En désignant par R_p l'espace à p dimensions, $(C^{(p)})$ est donc isomorphe avec $(C) \times R_p$ et par conséquent, en vertu du th. 6 qui précède, avec $(C) \times (c) \times R_p$.

Or, comme $(c) \times R_p$ est isomorphe avec (c), l'espace $(C^{(p)})$ est isomorphe avec $(C) \times (c)$, donc (encore d'après le th. 6) avec l'espace (C), c. q. f. d.

Théorème 8. *L'espace (C) est isomorphe avec l'espace $(C)^2$*[2].

Démonstration. Faisons correspondre à tout couple $x(t), y(t)$ de fonctions de (C) le couple $z(t), \xi$ où $z(t) \subset (C)$ est la fonction définie par les formules

[1] Ce théorème a été démontré par M. K. Borsuk.

[2] Ce théorème est dû aussi à M. K. Borsuk.

$$z(t) = \begin{cases} x(2t) & \textit{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ y(2t-1) - y(0) + x(1) & \textit{pour} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

et ξ est le nombre déterminé pour tout $y(t) \subset (C)$ par l'équation $\xi = y(0)$.

Ainsi l'espace $(C)^2$ se trouve transformé en $(C) \times R_1$, où R_1 désigne l'espace de tous les nombres réels. Cette transformation est linéaire et comme on a par définition $x(t) = z\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y(t) = z\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) - z\left(\frac{1}{2}\right) + \xi$, elle est biunivoque. On a ainsi l'isomorphie des espaces $(C)^2$ et $(C) \times R_1$ et comme en vertu du th. 6, p. 183, (C) est isomorphe avec $(C) \times (c)$, l'espace $(C)^2$ est isomorphe avec $(C) \times (c) \times R_1$, donc, par suite de l'isomorphie entre $(c) \times R_1$ et (c), avec l'espace $(C) \times (c)$ et par conséquent (encore en vertu du th. 6) avec l'espace (C), c. q. f. d.

Remarque. On ignore si l'espace (C) est isomorphe avec celui de toutes les fonctions continues définies dans le carré.

§ 8. *Espace (C) comme l'espace universel* [1]).

Théorème 9. *Tout espace E du type (B) séparable est équivalent à un sous-espace linéaire fermé de l'espace (C).*

Démonstration. Soient Γ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires à la norme $\leqslant 1$ définies dans E et $\{x_n\}$ la suite d'éléments de E à la norme $\leqslant 1$, dense dans la sphère $\|x\| \leqslant 1$.

Comme distance, posons pour tout couple f_1, f_2 de fonctionnelles appartenant à Γ

$$(34) \qquad (f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f_1(x_n) - f_2(x_n)|}{1 + |f_1(x_n) - f_2(x_n)|}.$$

Nous allons montrer que, avec cette définition de la distance, Γ est complet et compact.

[1]) Les théorèmes de ce § ont été trouvés en commun par M. S. Mazur et moi.

Considérons une suite $\{f_i\}$ où $f_i \subset \Gamma$ pour $i = 1, 2, ...$ et soit $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}} (f_p, f_q) = 0$. En vertu de (34), il existe donc la limite $\lim_{n\to\infty} f_i(x_n)$. Comme $|f_i| \leqslant 1$, la suite $\{f_i(x)\}$ est un vertu du th. 3 (Chap. V, § 1), p. 79, convergente pour tout $x \subset E$; par conséquent la suite des fonctionnelles $\{f_i\}$ est faiblement convergente vers une fonctionnelle f et on a $|f| \leqslant 1$, d'où $f \subset \Gamma$. Comme $\lim_{i\to\infty} f_i(x_n) = f(x_n)$ pour $n = 1, 2, ...$, on conclut de (34) que $\lim_{i\to\infty} (f_i, f) = 0$. Ainsi Γ est complet.

D'autre part, on peut extraire de la suite $\{f_i\}$ par le procédé de la diagonale une suite partielle $\{f_{i_k}\}$ telle que $\lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x_n)$ existe pour $n = 1, 2, ...$, d'où, comme auparavant, l'existence d'une fonctionnelle $f \subset \Gamma$ telle que $\lim_{k\to\infty} (f_{i_k}, f) = 0$. Ainsi Γ est compact.

Il existe par conséquent [1]) une transformation continue de l'ensemble parfait et non dense de Cantor $P \subset [0,1]$ en ensemble Γ. En désignant par $f_t \subset \Gamma$ la fonctionnelle qui vient correspondre au point $t \subset P$, considérons un élément quelconque $x \subset E$ et définissons $y(t)$ comme il suit: posons pour tout $t \subset P$

$$y(t) = f_t(x)$$

et pour les points de l'ensemble $[0, 1] - P$ complétons la fonction $y(t)$ d'une façon linéaire, en posant notamment pour tout $t \subset [0,1] - P$

$$y(t) = \frac{y(t') - y(t'')}{t' - t''} \cdot (t - t'') + y(t''),$$

où t' et t'' désignent les points les plus proches de P tels que $t' < t < t''$.

Examinons les propriétés de la fonction $y(t)$ ainsi définie.

Si $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ où $t_n \subset P$, la suite $\{f_{t_n}\}$ converge faiblement vers f_{t_0}, d'où $\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(x) = f_{t_0}(x)$, donc $\lim_{n\to\infty} y(t_n) = y(t_0)$. La fonction y est par conséquent continue dans P. Comme linéaire ailleurs, elle est donc continue dans $[0,1]$ tout entier; ainsi $y(t) \subset (C)$.

---

[1]) v. p. ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin 1927), p. 197.

D'autre part, il existe en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle $f \subset \Gamma$ telle que $\|f(x)\| = \|x\|$. Soit $t_0 \subset [0,1]$ le point tel que $f = f_{t_0}$. On a donc $|y(t_0)| = |f_{t_0}(x)| = \|x\|$ et comme

$$|y(t)| = |f_t(x)| \leqslant \|f_t\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\| \quad \textit{pour tout} \quad t \subset P,$$

on en conclut en raison du fait que la fonction $|y(t)|$ atteint son maximum dans l'ensemble P, que $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y(t)| = \|x\|$.

Ainsi, nous avons fait correspondre à tout élement $x \subset E$ un élément $y = y(t) \subset (C)$ et on voit, en posant $y = U(x)$, que cette opération est additive. Comme $\|y\| = \|x\|$, elle est linéaire et transforme l'espace E en un sous-espace E_1 de (C) d'une façon isométrique. Les espaces E et $E_1 \subset (C)$ sont donc équivalents, c. q. f. d.

Théorème 10. *Tout espace métrique séparable E peut être transformé d'une manière isométrique en un sous-espace de (C).*

Démonstration. Selon une remarque de M. Fréchet[1]) tout espace métrique séparable E se laisse transformer isométriquement en un sous-espace de (m). Une telle transformation s'obtient, comme on le vérifie sans peine, en faisant correspondre à tout $x \subset E$ la suite $\{\xi_n\}$ définie par la formule

$$\xi_n = (x, x_n) - (x_0, x_n) \quad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

où la suite $\{x_n\}$ forme un ensemble dense dans E.

En conséquence, nous pouvons nous borner au cas où $E \subset (m)$. On montre facilement que l'espace formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de E et de leurs limites est un espace du type (B) séparable. En vertu du th. 9 qui précède il existe donc une transformation isométrique de cet espace, et à plus forte raison de son sous-espace E, en un sous-espace de (C), c. q. f. d.

Remarque. En vertu des th. 9 et 10 qui viennent d'être établis l'espace (C) peut être considéré comme l'espace *universel* pour les

[1]) cf. M. Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait.* Math. Annalen 68 (1910), p. 161.

espaces séparables du type (B), resp. métriques. L'étude des espaces du type (B) se réduit donc à celle des sous-ensembles linéaires fermés de l'espace (C).

§ 9. *Espaces conjugués.*

Etant donné un espace E du type (B), l'espace $\overline{E}$ de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E est évidemment aussi du type (B). Nous appellerons $\overline{E}$ l'espace *conjugué* avec E.

Théorème 11. *Si deux espaces E et E_1 du type (B) sont isomorphes, resp. équivalents, les espaces $\overline{E}$ et $\overline{E_1}$ sont également isomorphes, resp. équivalents.*

Démonstration. En effet, si une opération linéaire $y = U(x)$ transforme E en E_1 d'une manière biunivoque et bicontinue, l'opération conjuguée $X = \overline{U}(Y)$ transforme en vertu du th. 5 (Chap. X, § 1), p. 149, l'espace $\overline{E_1}$ en espace $\overline{E}$ tout entier également d'une manière biunivoque et linéaire, d'où l'isomorphie de ces derniers espaces.

Si, en outre, E et E_1 sont équivalents, on a pour les fonctionnelles linéaires correspondantes X et Y:

$$|X| = \underset{|x| \leqslant 1}{\text{borne sup}}\, X(x) = \underset{|x| \leqslant 1}{\text{borne sup}}\, Y[U(x)] = \underset{|y| \leqslant 1}{\text{borne sup}}\, Y(y) = |Y|,$$

de sorte que les espaces $\overline{E}$ et $\overline{E_1}$ sont dans ce cas équivalents, c. q. f. d.

Remarque. Cependant, l'équivalence des espaces $\overline{E}$ et $\overline{E_1}$ n'entraîne pas toujours celle des espaces E et E_1.

Considérons, à titre d'exemple, les espaces $E = (c)$ et $E_1 = (c)^2_m$ [1]. Comme espaces conjugués avec eux on obtient $\overline{E} = (l)$ et $\overline{E_1} = (l)^2_l$ [1]) et on établit facilement leur équivalence. Mais il n'en est pas ainsi des espaces E et E_1. Nous pouvons regarder E comme l'espace des fonctions continues définies dans l'ensemble Q composé de nombres 0 et $\dfrac{1}{n}$ où $n = 1, 2, \ldots$ et l'espace E_1 peut être

[1]) Pour la signification des indices dans ces symboles voir p. 182.

considéré comme celui des fonctions continues définies dans l'ensemble Q_1 formé de nombres $0, 1, \frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n}$ où $n=1, 2, \ldots$ Or, les ensembles Q et Q_1 en question n'étant pas homéomorphes, on en conclut en vertu du th. 3, p. 170, que les espaces E et E_1 ne sont pas isométriques, donc à plus forte raison équivalents.

Théorème 12. *Si l'espace conjugué $\overline{E}$ est séparable, l'espace E l'est également.*

Démonstration. $\Gamma \subset \overline{E}$ désignant l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans E à la norme 1, il existe par l'hypothèse une suite $\{X_n\}$, où $X_n \subset \Gamma$, dense dans Γ.

Soit $\{x_n\}$ la suite d'éléments de E qui remplissent les conditions

$$(35) \qquad |x_n| = 1 \quad et \quad X_n(x_n) > \frac{1}{2} \quad pour \ n = 1, 2, \ldots$$

En supposant que l'espace E ne soit pas séparable, on peut affirmer que la suite $\{x_n\}$ n'est pas fondamentale dans E, donc, en vertu du th. 7 (Chap. IV, § 3), p. 58, elle n'y est pas totale. Il existe par conséquent une fonctionnelle linéaire $X \subset \Gamma$ telle que

$$(36) \qquad |X| = 1 \quad et \quad X(x_n) = 0 \quad pour \ n = 1, 2, \ldots$$

En posant $Z_n = X_n - X$, on a par conséquent selon (35) et (36) $Z_n(x_n) = X_n(x_n) - X(x_n) > \frac{1}{2}$, d'où $|Z_n| > \frac{1}{2}$, donc $|X_n - X| > \frac{1}{2}$ pour tout n naturel, ce qui est impossible, la suite $\{X_n\}$ étant supposée dense dans Γ et X appartenant à Γ.

Théorème 13. *Etant donné un espace E du type (B) séparable et tel que toute suite $\{x_i\}$ d'éléments de E à normes bornées dans leur ensemble contient une suite partielle faiblement convergente vers un élément de E, l'espace E est équivalent à l'espace $\overline{\overline{E}}$ (conjugué de $\overline{E}$).*

Démonstration. Soit G l'ensemble des fonctionnelles linéaires $F(X)$ définies dans $\overline{E}$ et telles que $F(X) = X(x_0)$ pour tout $X \subset \overline{E}$ et pour un $x_0 \subset E$ qui ne dépend que de F. On a donc $|F(X)| \leqslant |X| \cdot |x_0|$, d'où l'inégalité $|F| \leqslant |x_0|$. En vertu du th. 3

(Chap. IV, § 2), p. 55, il existe d'autre part une fonctionnelle $X_0 \subset \bar{E}$ telle que $|X_0| = 1$ et $X_0(x_0) = |x_0|$, donc $F(X_0) = |x_0|$, d'où l'inégalité $|F| \geqslant |x_0|$. Les deux inégalités donnent $|F| = |x_0|$.

G est un ensemble *total* (dans l'espace $\bar{\bar{E}}$ des fonctionnelles linéaires définies dans $\bar{E}$).

En effet, si pour un $X_0 \subset \bar{E}$ on a $F(X_0) = 0$, quel que soit $F \subset G$, on a aussi $X_0(x) = 0$, quel que soit $x \subset E$, donc $X_0 = 0$.

Nous allons montrer que l'ensemble G est *transfiniment fermé.*

Soient à ce but ϑ un nombre-limite quelconque et $\{F_\xi\}$ où $F_\xi \subset G$ pour $1 \leqslant \xi < \vartheta$ une suite transfinie de fonctionnelles à normes bornées dans leur ensemble. Il existe donc un nombre $M > 0$ tel qu'on a $|F_\xi| < M$ pour $1 \leqslant \xi < \vartheta$ et par définition de G toute fonctionnelle F_ξ est de la forme $F_\xi(X) = X(x_\xi)$. L'espace E étant par hypothèse séparable, soit $\{x_i\}$ la suite dense dans E.

Pour tout n naturel désignons par $x_\xi^{(n)}$ un terme arbitrairement extrait de $\{x_i\}$ qui satisfait à l'inégalité

$$|x_\xi^{(n)} - x_\xi| < \frac{1}{n} \tag{37}$$

et posons

$$F_\xi^{(n)}(X) = X(x_\xi^{(n)}) \quad \textit{pour} \quad X \subset \bar{E}.$$

Dans le cas où ϑ est confinal avec ω (donc où il existe une suite $\{\xi_i\}$ à i naturels de nombres transfinis tels que $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i = \vartheta$ et $\xi_i < \vartheta$ pour $i = 1, 2, \ldots$), la suite $\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$ renferme une suite partielle faiblement convergente vers un élément $x^{(n)} \subset E$. Evidemment on a alors

$$\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}}\, F_\xi^{(n)}(X) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}}\, F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \overline{\lim_{i\to\infty}}\, X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)})$$

et par conséquent la fonctionnelle $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ est une limite transfinie de la suite $\{F_\xi^{(n)}\}$.

Dans le cas où le nombre-limite ϑ n'est pas confinal avec ω, la suite transfinie $\{x_\xi^{(n)}\}$, qui ne contient par définition qu'une infinité au plus dénombrable de termes différents, renferme un

terme $x^{(n)}$ tel que pour tout $\eta < \vartheta$ il existe un $\xi > \eta$ donnant lieu à l'égalité $x_\xi^{(n)} = x^{(n)}$. On a alors

$$\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) = \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}),$$

de sorte que la fonctionnelle $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ est encore une limite transfinie de la suite $\{F_\xi^{(n)}\}$.

Ceci établi, considérons la suite $\{x^{(n)}\}$. On peut en extraire une suite faiblement convergente vers un $\bar{x} \subset E$. Posons $X(\bar{x}) = F_0(X)$. On a donc d'une part

$$(38) \qquad \overline{\lim} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X) \quad \textit{pour tout } X \subset \bar{E}$$

et d'autre part, par définition de G, $F_0 \subset G$. Or, on a selon (37) $X(x_\xi) \geqslant X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}|X|$, d'où, par définition de F_ξ et $F_\xi^{(n)}$,

$\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi(X) = \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi) \geqslant \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}|X| = \overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) - \frac{1}{n}|X| \geqslant$ $\geqslant F^{(n)}(X) - \frac{1}{n}|X|$ et par conséquent, selon (38), $\overline{\lim_{\xi\to\vartheta}} F_\xi(X) \geqslant$ $\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X)$. La fonctionnelle F_0 est donc une limite transfinie de la suite $\{F_\xi\}$ et puisque $F_0 \subset G$, l'ensemble G est en effet transfiniment fermé.

Comme total et transfiniment fermé, l'ensemble G coïncide en vertu de la remarque (Chap. VIII, § 2), p. 117, et du lemme 3 (Chap. VIII, § 3), p. 121, avec l'espace $\bar{\bar{E}}$.

Par définition de G, à tout $F \subset \bar{\bar{E}}$ vient donc correspondre un $x \subset E$ tel que, comme il a été prouvé au début, $|F| = |x|$. L'opération $U(x) = F$ est par conséquent biunivoque, linéaire et transforme E en $\bar{\bar{E}}$ sans altérer la norme. Les espaces E et $\bar{\bar{E}}$ sont donc équivalents, c. q. f. d.

Remarque. Ainsi p. ex. les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$ sont équivalents aux espaces conjugués avec ceux des fonctionnelles linéaires définies dans eux (cf. p. 181, 2°).

Théorème 14. *L'espace conjugué avec le produit des espaces du type (B) est isomorphe au produit des espaces conjugués avec eux.*

Démonstration. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant des espaces du type (B), il s'agit d'établir l'isomorphie entre l'espace $\overline{E}$ où $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et l'espace $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n$. On peut se borner au cas où $n = 2$.

Désignons respectivement par x_1, x_2 et z les éléments de E_1, E_2 et E et par X_1, X_2 et Z les fonctionnelles linéaires définies dans ces espaces.

Soit H l'ensemble de tous les couples x_1, Θ où $x_1 \subset E_1$. Nous pouvons donc regarder H comme un sous-ensemble de $E = E_1 \times E_2$ et par conséquent toute fonctionnelle linéaire Z, considérée dans l'espace H, détermine une fonctionnelle linéaire X_1 définie dans E_1. Posons

$$Z(z) = X_1(x_1) \quad \textit{pour } z = x_1, \Theta$$

et d'une façon analogue

$$Z(z) = X_2(x_2) \quad \textit{pour } z = \Theta, x_2.$$

Pour $z = x_1, x_2$ on a donc, comme il est facile de vérifier,

$$Z(z) = X_1(x_1) + X_2(x_2). \tag{39}$$

Réciproquement, étant données deux fonctionnelles linéaires $X_1 \subset \overline{E}_1$ et $X_2 \subset \overline{E}_2$, la formule (39) détermine la fonctionnelle $Z \subset \overline{E}$.

La correspondance est biunivoque et établit une transformation linéaire de $\overline{E}_1 \times \overline{E}$ en $\overline{E}$ tout entier, donc l'isomorphie de ces deux espaces, q. f. d.

Remarque. En posant $E = [E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n]_{l^p}$, resp. $E = [E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n]_m$, on aperçoit aisément que l'espace conjugué $\overline{E}$ est *isométrique* pour $p > 1$ avec l'espace $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_{l^{\frac{p}{p-1}}}$ et pour $p = 1$ avec l'espace $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_m$, resp. avec l'espace $[\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n]_l$.

CHAPITRE XII.

Dimension linéaire.

§ 1. *Définitions.*

Etant donnés deux espaces E et E_1 du type (F), nous dirons que la *dimension linéaire* de l'espace E *ne dépasse pas* celle de l'espace E_1, en formule:

$$\dim_l E \leqslant \dim_l E_1, \tag{1}$$

si E est isomorphe avec un sous-espace vectoriel fermé de E_1.

Les espaces E et E_1 s'appelleront *de dimension linéaire égale,* en formule:

$$\dim_l E = \dim_l E_1,$$

lorsqu'on a les relations (1) et

$$\dim_l E_1 \leqslant \dim_l E \tag{2}$$

à la fois.

L'espace E sera dit *de dimension linéaire inférieure* que E_1, lorsqu'on a la relation (1) sans avoir (2). En formule:

$$\dim_l E < \dim_l E_1.$$

Enfin, les dimensions linéaires de ces espaces s'appelleront *incomparables,* lorsque les deux relations (1) et (2) sont en défaut.

Les espaces isomorphes sont donc toujours de dimension linéaire égale. On ne sait pas si la réciproque est aussi vraie, mais je considère comme très probable qu'il existe des espaces du

type (B), même séparables, qui soient des dimensions linéaires égales sans être isomorphes.

Tout espace qui est isomorphe avec l'espace euclidien n-dimensionnel sera dit simplement *à n dimensions*. Un espace du type (B) pour lequel un tel n n'existe pas sera dit *à une infinité de dimensions.*

§ 2. *Dimension linéaire des espaces* (c) *et* $(l^{(p)})$ *où* $p \geqslant 1$.

Théorème 1. *Si on a pour un espace E du type* (B)

$$\dim_l E < \dim_l (c) \tag{3}$$

ou bien

$$\dim_l E < \dim_l (l^{(p)}) \quad \textit{pour un} \quad p \geqslant 1, \tag{4}$$

E est un espace à un nombre fini de dimensions.

Démonstration. L'espace (c) étant isomorphe avec l'espace (c_0) des suites de nombres convergentes vers 0 (v. Chap. XI, § 6, p. 180, 1°), il existe en vertu de (3) un ensemble linéaire et fermé $G \subset (c_0)$, isomorphe avec E. En supposant que E, donc aussi G, est à une infinité de dimensions, il existerait pour tout N naturel une suite de $N+1$ éléments $z_i \subset G$ où $i = 1, 2, \ldots, N+1$ telle que

$$\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i = 0 \quad \textit{entraîne} \; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{N+1} = 0\,.$$

Par conséquent, si on pose $z_i = \{\beta_n^i\}$, on trouvera des nombres α_i où $i = 1, 2, \ldots, N+1$ qui (sans être tous égaux à 0) vérifient les équations $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \beta_n^i = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots, N$. En désignant par $\{\beta_n\}$ la suite $z = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i$, on obtient donc

$$\|z\| > 0 \quad et \quad \beta_n = 0 \quad pour \; n = 1, 2, \ldots N. \tag{5}$$

Il est ainsi établi qu'il existe pour tout N naturel en élément $z = \{\beta_n\}$ de G ayant les propriétés (5).

Définissons à présent par induction une suite $\{y_i\}$, d'éléments de G où $y_i = \{\eta_n^i\}$, en choisissant arbitrairement comme y_1

un élément de G tel que $|y_1| = 1$ et comme y_i où $i = 2, 3, \ldots$ un élément de G tel que l'on ait

$$(6) \qquad |y_i| = 1 \quad et \quad \eta_n^i = 0 \quad pour \ n = 1, 2, \ldots, N_{i-1},$$

le nombre N_{i-1} étant le plus petit de ceux qui satisfont à l'inégalité

$$(7) \qquad |\eta_n^{i-1}| < \frac{1}{2^{i-1}} \quad pour \ tout \ n \geqslant N_{i-1}.$$

L'existence d'une telle suite $\{y_i\}$ résulte aussitôt de la prémisse qui vient d'être établie.

Soit G_0 l'ensemble composé de tous les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$ où $r = 1, 2, \ldots$ et de leurs limites. G_0 est évidemment un ensemble linéaire et fermé.

Ceci dit, considérons une suite bornée quelconque $x = \{\xi_i\}$ et posons

$$(8) \qquad \eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^i \quad pour \ n = 1, 2 .$$

Nous allons montrer que

$$(9) \qquad \frac{1}{6} \|x\| \leqslant \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2} \|x\| .$$

En effet, étant donné un indice n, il existe en vertu de (6) un m_i naturel tel que

$$(10) \qquad |\eta_{m_i}^i| = 1 \quad pour \ i = 1, 2, \ldots,$$

d'où par définition de N_i

$$(11) \qquad N_{i-1} \leqslant m_i < N_i$$

et par conséquent $\lim_{i \to \infty} N_i = \infty$; il existe donc un k naturel tel que l'on a pour l'indice n en question

$$(12) \qquad N_{k-1} \leqslant n < N_k,$$

où $N_0 = 1$.

Pour tout $i > k$ on a par conséquent selon (11) $N_k \leqslant N_{i-1}$, d'où, selon (12), $n < N_{i-1}$. On en conclut en vertu de (6) que $\eta_{in}^i = 0$ pour tout $i > k$, donc d'après (8) que

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_{in}^i. \tag{13}$$

Pour tout $i < k$ on a en même temps selon (11) $N_i \leqslant N_{k-1}$, d'où selon (12) $N_i \leqslant n$, donc d'après (7) $|\eta_{in}^i| < \frac{1}{3^i}$. Comme $|\eta_n^k| \leqslant 1$ et $|\xi_i| \leqslant \|x\|$ pour tout i, il en résulte en vertu de (13) que l'on a d'une part la relation $|\eta_n| \leqslant \|x\| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} + \|x\| \leqslant \frac{3}{2} \|x\|$, d'où

$$\underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2} \|x\|, \tag{14}$$

et d'autre part, pour tout k satisfaisant à (12), la relation

$$|\eta_n| \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_{in}^k| - \|x\| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_{in}^k| - \frac{1}{2} \|x\| \tag{15}$$

Or, il existe un k tel que $|\xi_k| \geqslant \frac{2}{3} \|x\|$, donc conformément à (10), que $|\eta_{m_k}^k| = 1$. Par conséquent, la relation (15) étant déduite pour l'indice n donné arbitrairement, on en tire pour $n = m_k$: $|\eta_n| \geqslant \frac{2}{3} \|x\| - \frac{1}{2} \|x\| = \frac{1}{6} \|x\|$, d'où $\underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} |\eta_n| \geqslant \frac{1}{6} \|x\|$. En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (14), nous voyons que la formule (9) se trouve ainsi établie.

Faisons à présent correspondre à tout $x = \{\xi_i\}$ la suite $y = \{\eta_n\}$, définie par l'égalité (8). En vertu de (9) la suite y est bornée et on a, en posant $y = U(x)$,

$$\frac{1}{6} |x| \leqslant |U(x)| \leqslant \frac{3}{2} |x|, \tag{16}$$

de sorte que l'opération $U(x)$ est *linéaire*.

D'autre part, pour $x_i = \{\xi_n^i\}$, ou

$$\xi_n^i = \begin{matrix} 1 & pour\ i = n \\ 0 & pour\ i \neq n, \end{matrix}$$

on a par définition $y_i = U(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Par conséquent pour $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ on a $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$ d'où, par suite de la continuité de l'opération $U(x)$, il vient $y = U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$, donc, cette dernière série étant convergente, on obtient $y \subset G_0$.

Réciproquement, soit $y \subset G_0$. Par définition de G_0 on a donc $y = \lim s_n$ où $s_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^n y_i$; pour $t_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^n x_i$ on a par conséquent $t_n \subset (c_0)$ et $U(t_n) = s_n$. Or, la relation (16) donne $\frac{1}{6}|t_p - t_q| \leqslant$ $\leqslant |U(t_p - t_q)| = |s_p - s_q|$; l'égalité $\lim_{p\to\infty, q\to\infty} |s_p - s_q| = 0$ entraîne donc $\lim_{\substack{p\to\infty,\\ q\to\infty}} |t_p - t_q| = 0$. Ainsi la suite $\{t_n\}$ est convergente. En posant $x = \lim_{n\to\infty} t_n$, on a donc $x \subset (c_0)$ et $U(x) = y$, de sorte que l'opération $U(x)$ est *biunivoque* et transforme (c_0) en G_0 *tout entier*.

Les espaces (c_0) et G_0 sont donc isomorphes et comme $G_0 \subset G$, on en conclut que $\dim_l (c_0) \leqslant \dim_l G$, ce qui entraîne par suite des isomorphies entre G et E et entre (c_0) et (c) que $\dim_l (c) \leqslant \dim_l E$, contrairement à l'hypothèse (3). Le nombre de dimensions de E est par conséquent fini, c. q. f. d.

Pour $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ la démonstration est analogue.

§ 3. *Dimension linéaire des espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$* [1].

Théorème 2. *Toute suite de fonctions $\{x_i(t)\}$ appartenant à $(L^{(p)})$, faiblement convergente vers 0, contient une suite partielle $\{x_{i_k}(t)\}$ telle que l'on a*

$$(17) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = \begin{cases} O(n^{\frac{1}{p}}) & pour\ 1 < p \leqslant 2 \\ O(n^{\frac{1}{2}}) & pour\ \quad p \geqslant 2. \end{cases}$$

[1]) Les théorèmes de ce § ont été trouvés en collaboration avec M. S. Mazur.

Démonstration. Nous allons nous appuyer sur l'inégalité suivante pour $p > 1$:

$$(18) \qquad |a+b|^p \leqslant |a|^p + p|a|^{p-1} b \cdot \operatorname{sign} a + A|b|^p + B \sum_{j=2}^{E(p)} |a|^{p-j} |b|^j \text{ [1]}$$

où a et b sont des nombres réels quelconques, A et B des constantes qui ne dépendent que de p et $E(p)$ désigne l'entier de p. Par conséquent le dernier sommande disparait, lorsque $p \leqslant 2$.

Définissons la suite $\{x_{i_k}\}$ par induction, en posant $i_1 = 1$ et en désignant par i_n où $n > 1$ un nombre naturel arbitraire satisfaisant à l'inégalité

$$(19) \qquad p \left| \int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1}(t) \cdot x_{i_n}(t)\, dt \right| \leqslant 1$$

où $s_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}(t)$. Un tel i_n existe, puisque par l'hypothèse la suite $\{x_i(t)\}$ converge faiblement vers 0 et $|s_{n-1}(t)|^{p-1} \subset (L^{(q)})$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

L'inégalité (18) donne pour $a = s_{n-1}(t)$ et $b = x_{i_n}(t)$ par intégration:

$$(20) \qquad \int_0^1 |s_n|^p\, dt \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p\, dt + p \int_0^1 |s_{n-1}|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1} \cdot x_{i_n}\, dt +$$

$$+ A \int_0^1 |x_{i_n}|^p\, dt + B \sum_{j=2}^{E(p)} \int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j} |x_{i_n}|^j\, dt.$$

La convergence faible de la suite $\{x_n(t)\}$ implique en vertu du th. 1 (Chap. IX, § 1), p. 133, que la suite des nombres $\{\|x_n\|\}$ est bornée et on peut admettre sans restreindre la généralité du raisonnement que

$$(21) \qquad \|x_n\| \leqslant 1 \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots$$

[1] Pour la démonstration de cette inégalité voir S. Banach et S. Saks, *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Studia Mathematica II (1930), p. 52.

Or, dans le cas où $p > 2$ on a selon (21) en vertu de l'inégalité de Riesz (cf. Introduction, § 2, p. 2) pour $2 \leqslant j \leqslant p$:

$$\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j} |x_{i_n}|^j dt \leqslant \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p dt\right]^{\frac{p-j}{p}} \leqslant 1 + \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p dt\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

d'où, selon (19) et (20), $\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + 1 + A + Bp\,(1 + \|s_{n-1}\|^{p-2})$, ce qui conduit par itération à la forme

$$\|s_n\|^p \leqslant C\cdot n + D\sum_{k=1}^{n-1} \|s_k\|^{p-2} \tag{22}$$

où $C = 1 + A + Bp$ et $D = Bp$.

Soit $M = C + D + 2$. Nous allons montrer par induction que

$$\|s_n\| \leqslant M\cdot n^{\frac{1}{2}} \quad pour\ n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

En effet, par définition de s_n et d'après (21) on a $\|s_1\| \leqslant 1$ et, en admettant que l'inégalité (23) est vraie pour les indices inférieurs à un n donné, on a selon (22) $\|s_n\|^p \leqslant D\cdot M^{p-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\frac{p-2}{2}} + C\cdot n \leqslant$

$\leqslant D\cdot M^{p-2}\cdot n^{\frac{p}{2}} + C\cdot n \leqslant M^p n^{\frac{p}{2}} (D\cdot M^{-2} + n^{1-\frac{p}{2}} C\cdot M^{-p})$, ce qui entraîne l'inégalité (23), puisque, comme on vérifie facilement, la somme en parenthèses est < 1 pour $p > 2$.

En vertu de (23), l'égalité $\|s_n\| = O(n^{\frac{1}{2}})$ pour $p > 2$ est ainsi établie.

Passons au cas où $1 < p \leqslant 2$. Par définition de s_n on tire de (20) et (21) $\int_0^1 |s_n|^p dt \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p dt + 1 + A + B$, d'où $\|s_n\|^p \leqslant$ $\leqslant \|s_{n-1}\|^p + C$ où $C = 1 + A + B$ et par conséquent $\|s_n\|^p \leqslant \|s_1\|^p +$ $+ C\,(n-1) \leqslant C\cdot n$ donc, en posant $M^p = C$ nous obtenons $\|s_n\| \leqslant M\cdot n^{\frac{1}{p}}$, de sorte que dans le cas en question l'égalité $\|s_n\| = O\,(n^{\frac{1}{p}})$ se trouve aussi établie, c. q. f. d.

Remarque. Le théorème précédent cesse d'être vrai, quel que soit $p > 1$, si on remplace dans les relations (17) le signe O par o.

En effet, pour $p \geqslant 2$ soit $x_i(t) = \sin 2\pi i\, t$. Comme on a $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 \alpha(t) \sin 2\pi i\, t\, dt = 0$ pour toute fonction intégrable $\alpha(t)$, la suite $\{x_i(t)\}$ est dans $(L^{(p)})$ faiblement convergente dans l'intervalle $[0,1]$. En posant $s_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{i_k}(t)$ où $\{x_{i_k}(t)\}$ désigne une suite partielle arbitraire, on a donc $\|s_n(t)\| = \sqrt[p]{\int\limits_0^1 |s_n(t)|^p\, dt} \geqslant \sqrt{\int\limits_0^1 s_n^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}$, ce qui prouve que O ne peut pas être remplacé par o.

Pour $1 < p \leqslant 2$, en posant

$$x_i(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \textit{pour} \quad \frac{1}{2^i} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} \\ 0 & \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{2^i} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2^{i-1}} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

on a pour toute suite partielle $\{x_{i_k}(t)\}$ l'égalité $\|s_n\| = \sqrt[p]{\int\limits_0^1 |s_n(t)|^p\, dt} = \sqrt[p]{n}$, qui montre l'impossibilité de rempacer O par o aussi dans ce dernier cas.

Théorème 3. *Toute suite $\{x_i\}$ d'éléments de $(l^{(p)})$ où $p > 1$, faiblement convergente vers* 0, *renferme une suite partielle $\{x_{i_k}\}$ telle que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O\left(n^{\frac{1}{p}}\right). \tag{24}$$

Démonstration. Soit $x_i = \{\xi_r^i\}$. La convergence faible de $\{x_i\}$ vers 0 entraîne (cf. p. 137), que

$$\lim_{i\to\infty} \xi_r^i = 0 \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

et que

$$\| x_i \| \leqslant M \quad pour \quad i = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

La définition recurrentielle de la suite $\{x_{i_k}\}$ est la suivante: $x_{i_1} = x_1$ et x_{i_n} où $n > 1$ est un terme arbitraire de la suite $\{x_i\}$ satisfaisant à l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{N} | \xi_j + \xi_j^{i_n} |^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} | \xi_j |^p + 1, \tag{27}$$

où $\{\xi_j\} = s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}$ et N désigne un nombre naturel tel que

$$\sum_{j=N}^{} | \xi_j |^p \leqslant 1. \tag{28}$$

Un x_{i_n} ainsi défini existe en vertu de (25). On a par définition: $\| s_n \|^p = \| s_{n-1} + x_{i_n} \|^p = \sum_{j=1}^{N} | \xi_j - \xi_j^{i_n} |^p + \sum_{j=N} | \xi_j + \xi_j^{i_n} |^p$, d'où en vertu de (27) et de l'inégalité de Hölder $\| s_n \|^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} | \xi_j |^p + 1 + \left[\left(\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j |^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j^{i_n} |^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p$ et par conséquent selon (26) et (28) $\| s_n \|^p \leqslant \| s_{n-1} \|^p + 1 + (1 + M)^p = \| s_{n-1} \|^p + C$ où $C = 1 + (1 + M)^p$. Il en résulte que $\| s_n \|^p \leqslant C \cdot n$, d'où par définition de s_n l'égalité (24), q. f. d.

Remarque. Le th. 3 qui précède cesse d'être vrai pour tout $p > 1$, si on remplace O par o dans la formule (24).

En effet, il suffit de poser

$$\xi_r^i = \begin{cases} 1 & pour \ i = r \\ 0 & pour \ i \neq r, \end{cases}$$

pour avoir $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = n^{\frac{1}{p}}$, quelle que soit la suite partielle $\{x_{i_k}\}$.

Nous allons déduire des th. 2 et 3, qui viennent d'être établis, plusieurs relations d'une part entre les dimensions linéaires

des espaces $(L^{(p)})$ et $(L^{(q)})$, d'autre part entre celles des espaces $(l^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ et enfin entre les dimensions linéaires des espaces $(L^{(p)})$ et celles des espaces $(l^{(q)})$, en posant partout $p > 1 < q$.

Lemme. *Si* $\dim_l (L^{(p)}) \leqslant \dim_l (L^{(q)})$ *où* $p > 1 < q$, *alors on a soit* $q \leqslant p \leqslant 2$, *soit* $2 \leqslant p \leqslant q$.

Démonstration. Il existe par hypothèse une opération linéaire $y = U(x)$, où $x \subset (L^{(p)})$, qui transforme $(L^{(p)})$ en sous-espace fermé G de $(L^{(q)})$ d'une façon biunivoque et continue. Etant donnée une suite $\{x_n\}$ où $x_n \subset (L^{(p)})$, faiblement convergente vers Θ, il en est donc de même de la suite $\{y_n\}$ où $y_n = U(x_n)$. En vertu du th. 2, p. 197, il existe par conséquent une suite partielle $\{y_{i_n}\}$ telle que

$$(29) \quad \left\| \sum y_{i_k} \right\| = O(n^{\varphi(q)}) \quad \text{où } \varphi(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{pour } 1 < q \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{pour } q \geqslant 2. \end{cases}$$

L'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ étant continue, il existe un $M > 0$ tel que $\|x\| \leqslant M \|y\|$ pour tout $y \subset G$, d'où $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| \leqslant$ $\leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \right\|$ et par conséquent, selon (29), $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O(n^{\varphi(q)})$, donc, $\{x_i\}$ étant une suite arbitraire faiblement convergente vers Θ, on conclut de (29) que

$$(30) \qquad \varphi(p) \leqslant \varphi(q).$$

Or, comme les espaces des fonctionnelles linéaires définies dans $(L^{(p)})$ et $(L^{(q)})$ sont (cf. Chap. XI, § 6, p. 181, 2°) isométriques respectivement avec $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et $(L^{(\frac{q}{q-1})})$, nous pouvons admettre que l'opération conjuguée $X = \overline{U}(Y)$ transforme $(L^{(\frac{q}{q-1})})$ en $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ et il résulte du th. 3 (Chap. X, § 1), p. 148, qu'elle a pour contredomaine l'espace $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ tout entier. En vertu du th. 10 (Chap, X, § 1), p. 150, il existe donc un $m > 0$ tel

qu'à chaque $X \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ vienne correspondre un $Y \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$ de façon qu'on ait $X = \overline{U}(Y)$ et $\|Y\| \leqslant m \|X\|$.

Ceci dit, soient $\{X_n\}$ une suite quelconque d'éléments de $(L^{(\frac{p}{p-1})})$, faiblement convergente vers 0 et $\{Y_n\}$ la suite assujettie aux conditions $X_n = \overline{U}(Y_n)$ et $\|Y_n\| \leqslant m \|X_n\|$ pour tout n naturel. La suite des normes $\{\|Y_n\|\}$ étant donc bornée, il existe (voir Chap. VIII, § 7, p. 130), une suite partielle $\{Y_{n_i}\}$ faiblement convergente. Si on en désigne la limite par Y_0, il vient $\overline{U}(Y_0)=0$, puisque la suite $\{X_{n_i}\}$ converge faiblement vers 0. On a en conséquence $X_n = \overline{U}(Y_{n_i} - Y_0)$ et, en outre, la suite $\{Y_{n_i} - Y_0\}$ converge faiblement vers 0. En posant $Y_i = Y_{n_i} - Y_0$ pour $i = 1, 2, \ldots$, on peut donc en extraire en vertu du th. 2, p. 197, une suite partielle $\{Y_{i_k}\}$ telle que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} Y_{i_k} \right\| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right) \tag{32}$$

d'où, en posant $X_{i_k} = \overline{U}(Y_{i_k})$, on obtient $\|X_{i_k}\| \leqslant \|\overline{U}\| \, \|Y_{i_k}\|$ et

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} X_{i_k} \right\| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right). \tag{33}$$

La suite $\{X_{i_k}\}$ étant par définition extraite de $\{X_n\}$, on conclut de (32) et (33) en vertu de la remarque p. 200, que

$$\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{q}{q-1}\right) \tag{34}$$

d'où selon (30) et par définition de la fonction φ on tire sans peine les inégalités qu'il fallait démontrer.

On déduit facilement de ce lemme les théorèmes suivants.

Théorème 4. *Si* $\dim_l (L^{(p)}) = \dim_l (L^{(q)})$ *où* $p > 1 < q$, *on a* $p = q$.

Théorème 5. *Si* $1 < p < 2 < q$, *les espaces* $(L^{(p)})$ et $(L^{(q)})$ *sont des dimensions linéaires incomparables.*

Théorème 6. *Si* $1 < p \neq 2$, *on a* $\dim_l (L^2) < \dim_l (L^{(p)})$.

Démonstration. Soit pour $x(t) \subset (L^2)$:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos 2^i t + b_i \sin 2^i t)$$

où $a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos it\, dt$ et $b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin it\, dt$, quel que soit $i = 0, 1, 2, \ldots$

Comme $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) = \int^{2\pi} x^2(t)\, dt$, il existe [1]) une constante $M > 0$ (ne dépendant que de p) telle que

$$\int^{2\pi} |y(t)|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant M \left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En posant $y = U(x)$, on a donc $y \subset (L^{(p)})$ et l'inégalité précédente peut être écrite dans la forme

$$\|y\| \leqslant M \|x\|,$$

de sorte que l'opération $U(x)$ est linéaire.

Il existe [2]) d'autre part une constante K telle que $\left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \int_0^{2\pi} |y(t)|\, dt$, d'où en vertu de l'inégalité de Riesz (v. Introduction, § 2, p. 2):

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \sqrt[p]{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |y(t)|^p\, dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

donc $\|x\| \leqslant C \|y\|$ où $C = K \sqrt[p]{2\pi}$, de sorte que $U(x)$ admet l'opération inverse continue.

On a par conséquent la relation

$$\dim_l (L^2) \leqslant \dim_l (L^{(p)})$$

[1]) en vertu d'un théorème de M. A. Zygmund (v. *Sur les séries trigonométriques lacunaires*, Proceed. London. Math. Soc. 5 (1930), p. 138—145).

[2]) voir S. Banach, *Lakunäre trigonometrische Reihen*, Studia Mathematica II (1930), p. 212.

où le signe d'égalité est exclu (puisqu'on aurait alors en vertu du th. 4, p. 203, l'égalité $p=2$, contrairement à l'hypothèse), c. q. f. d.

Il est à noter que le problème suivant reste ouvert: *est-il vrai que pour* $q<p<2$, *ainsi que pour* $2<p<q$ *on a toujours* $\dim_l (L^{(p)}) < \dim_l (L^{(q)})$?

Pour les espaces $(l^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ on a le

Théorème 7. *Les espaces* $(l^{(p)})$ *et* $(l^{(q)})$ *où* $1<p \neq q>1$ *sont des dimensions linéaires incomparables.*

Démonstration. En posant $\dim_l (l^{(p)}) \leqslant \dim_l (l^{(q)})$ et en procédant comme dans la démonstration du lemme, p. 202, on obtient en effet les inégalités (qui correspondent aux formules (30) et (34)):

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q} \quad et \quad \frac{p-1}{p} \leqslant \frac{q-1}{q},$$

d'où $p=q$, contrairement à l'hypothèse.

Passons aux relations de dimensions linéaires entre $(L^{(p)})$ et $(l^{(q)})$.

Théorème 8. *Si* $\dim_l (L^{(p)}) \leqslant \dim_l (l^{(q)})$ *où* $p>1<q$, *on a* $p=q=2$.

Démonstration. Par le même procédé on obtient (au lieu de (30) et (34)):

$$\varphi(p) \leqslant \frac{1}{q} \quad et \quad \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \frac{q-1}{q},$$

où

$$(35) \qquad \varphi(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & pour\ n \leqslant 2 \\ \frac{1}{2} & pour\ n \geqslant 2, \end{cases}$$

Il en résulte aussitôt que $p=q=2$, c. q. f. d.

Le th. 8 qui précède entraîne en vertu du th. 1 (Chap. XI, § 2), p. 165, le

Corollaire. *Pour que* $\dim_l(L^{(p)}) = \dim_l(l^{(q)})$, *il faut et il suffit que* $p = q = 2$.

Théorème 9. *Si* $1 < p \neq 2$, *on a* $\dim_l(L^{(p)}) > \dim_l(l^{(p)})$.

Démonstration. En effet, si on avait par contre $\dim_l(L^{(p)}) \leqslant \dim_l(l^{(p)})$, on aurait en vertu du th. 8, p. 205, en y posant $p = q$, l'égalité $p = 2$, contrairement à l'hypothèse.

Il reste donc à montrer que les espaces en question sont de dimensions linéaires comparables. Posons à ce but

$$y_i(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \text{pour } \frac{1}{2^i} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} \\ 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < \frac{1}{2^i} \text{ et } \frac{1}{2^{i-1}} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

d'où $\int_0^1 |y_i(t)|^p \, dt = 1$, donc $y_i(t) \subset (L^{(p)})$ pour $i = 1, 2, \ldots$; soit pour tout $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i(t),$$

d'où $\int_0^1 |y(t)|^p \, dt = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$. En posant par conséquent $y = U(x)$, on obtient $\|y\| = \|x\|$, ce qui prouve que l'opération $U(x)$ est linéaire et admet l'opération inverse continue. Or, elle transforme par isomorphie $(l^{(p)})$ en sous-espace de $(L^{(p)})$.

Théorème 10. *Pour* $1 < q < p < 2$, *de même que pour* $2 < p < q$, *les espaces* $(L^{(p)})$ *et* $(l^{(q)})$ *sont des dimensions linéaires incomparables.*

Démonstration. En supposant que $\dim_l(L^{(p)}) \geqslant \dim_l(l^{(q)})$, on aboutit par le raisonnement employé dans la démonstration du lemme, p. 202, aux inégalités (analogues à (30) et (34)):

$$\frac{1}{q} \leqslant \varphi(p) \quad \text{et} \quad \frac{q-1}{q} \leqslant \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right),$$

où la fonction φ est définie par la formule (35), p. 205. On en

déduit aussitôt qu'on a soit $p \leqslant q \leqslant 2$, soit $2 \leqslant q \leqslant p$, contrairement à l'hypothèse.

La question suivante reste cependant non résolue: *est-il vrai que* $p < q < 2$, *de même que* $2 < q < p$, *entraîne l'inégalité* $\dim_l (L^{(p)}) > \dim_l (l^{(q)})$?

Convergence faible dans les espaces du type *(B)*.

Nous distinguons dans les espaces du type (B) deux notions de convergence faible, à savoir: la convergence faible des fonctionnelles linéaires et celle des éléments [1]). Les deux notions sont évidemment différentes. Nous allons ajouter ici quelques théorèmes relatifs à l'étude de ces notions.

§ 1. *Les dérivés faibles des ensembles de fonctionnelles linéaires.*

Etant donné un espace du type (B) *séparable*, soit Γ un ensemble quelconque de fonctionnelles linéaires définies dans E.

Appelons une fonctionnelle linéaire X *point d'accumulation faible* de l'ensemble Γ, lorsqu'il existe une suite de fonctionnelles $\{X_k\}$, où $X_k \neq X$ et $X_k \subset \Gamma$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$, qui converge faiblement vers la fonctionnelle X.

L'ensemble de tous les points d'accumulation faible de l'ensemble Γ sera dit le *dérivé faible d'ordre* 1 *de* Γ, et le dérivé faible du dérivé faible d'ordre $n-1$ de Γ s'appellera *dérivé faible* d'ordre n de Γ. Les dérivés faibles successifs de Γ seront désignés par $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \ldots, \Gamma_{(n)}, \ldots$

Si Γ est un ensemble linéaire, on a évidemment

$$\Gamma \subset \Gamma_{(1)} \subset \Gamma_{(2)} \subset \ldots \subset \Gamma_{(n)} \subset \Gamma_{(n+1)} \subset \ldots$$

[1]) cf. Chap. VIII, § 4, et Chap. IX, § 1.

Il est facile de donner un exemple d'ensemble linéaire Γ qui soit fermé, sans être faiblement fermé.

Considérons, en effet, comme Γ l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (c_0) [1]) de la forme

$$(1) \qquad X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \text{ [2]}),$$

où $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ *et* $C_1 = \sum_{i=2}^{\infty} C_i$.

On constate aisément que l'ensemble Γ ainsi défini est linéaire, fermé et qu'il ne contient pas la fonctionnelle de la forme (1) où $C_1 = 1$ et $C_i = 0$ pour $i = 2, 3, \ldots$ Or, cette dernière fonctionnelle étant (voir Remarques au Chap. VIII, § 6, p. 239) la limite faible de la suite $\{X_k\}$ des fonctionnelles de la forme (1) où

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 1 \text{ ou } i = k \\ 0 & \text{pour } i \neq 1 \text{ et } i \neq k, \end{cases}$$

l'ensemble Γ n'est pas faiblement fermé.

Théorème 1. *Il existe pour tout n naturel un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (c_0) et dont le dérivé faible d'ordre n n'est pas faiblement fermé* [3]).

Démonstration. Toute fonctionnelle linéaire X définie dans (c_0) étant de la forme (1) où $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| = \|X\|$, soient Δ_1 l'ensemble de celles où l'on a $C_{2i} = 0$ et Δ_2 l'ensemble de celles où $C_{2i-1} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Faisons correspondre d'une façon biunivoque à tout couple r, s de nombres naturels un nombre pair $N(r, s)$ et désignons par $Z_{r,s}$ la fonctionnelle linéaire définie dans (c_0) de la forme $Z_{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$ où $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$ et telle que

[1]) c. à d. dans l'espace des suites de nombres réels convergentes vers 0 (cf. Chap. XI, § 6, p. 180).

[2]) cf. Chap. IV, § 4, p. 66.

[3]) Le premier exemple d'un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires dont le dérivé faible n'est pas faiblement fermé a été donné par M. S. Mazurkiewicz (*Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires*, Studia Mathematica II (1930), p. 68—71).

$$C_i = \begin{cases} 1 & pour \quad i = N(r,s) \\ 0 & pour \quad i \neq N(r,s). \end{cases} \tag{2}$$

Considérons un ensemble linéaire quelconque G de fonctionnelles linéaires définies dans (c_0). Soit H l'ensemble de toutes les fonctionnelles de la forme (1) où $C_{2i} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et telles que la fonctionnelle $\sum_{i=1} C_{2i-1} \xi_i$ appartienne à G. L'ensemble H ainsi défini est évidemment linéaire et on a $H \subset \Delta_1$. Comme sous-espace de (l), l'ensemble Δ_1 est séparable. H contient donc une suite de fonctionnelles $\{Y_r\}$ dense dans l'ensemble des fonctionnelles à normes $\leqslant 1$, appartenant à H, et telle que

$$|Y_r| \leqslant 1 \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Posons pour r et s naturels:

$$X_{r,s} = Y_r + r Z_{r,s} \tag{4}$$

et désignons par Γ l'ensemble linéaire des fonctionnelles X de la forme

$$X = \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} a_{r,s} X_{r,s} = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} + \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} r a_{r,s} Z_{r,s}, \tag{5}$$

où il n'y ait tout au plus qu'un nombre fini de $a_{r,s}$ non nuls.

En raison de (4) et (5) on a donc par définition des ensembles Δ_1 et Δ_2

$$\left\| \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} a_{r,s} X_{r,s} \right\| \geqslant \left\| \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} r a_{r,s} Z_{r,s} \right\| = \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} | r a_{r,s} | \tag{6}$$

Soit à présent $\{X_k\}$ où $X_k \subset \Gamma$ pour $k = 1, 2, \ldots$ une suite faiblement convergente vers X. En vertu de (5) on peut poser

$$X_k = \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} X_{r,s} = X_k' + X_k'', \tag{7}$$

où

$$X_k' = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} \quad et \quad X_k'' = \sum_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} Z_{r,s}. \tag{8}$$

On a évidemment $X_k' \subset \Delta_1$ et $X_k'' \subset \Delta_2$, quel que soit k, de sorte que les suites $\{X_k'\}$ et $\{X_k''\}$ convergent faiblement vers certaines fonctionnelles $X' \subset \Delta_1$, et $X'' \subset \Delta_2$; par conséquent $X = X' + X''$.

H' désignant, comme d'habitude, l'ensemble dérivé de H au sens ordinaire, nous allons montrer d'abord que

$$X' \subset H' \tag{9}$$

En effet, il existe par suite de la convergence faible de la suite $\{X_k\}$ vers X, un nombre $M > 0$ tel qu'on a pour $k = 1, 2, \ldots$ $|X_k| \leqslant M$, d'où selon (6) — (8) $\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} |ra_{r,s}^{(k)}| \leqslant M$; en posant donc $b_r^{(k)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}$, on peut écrire

$$\sum_{r=1}^{\infty} |rb_r^{(k)}| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Il existe par conséquent une suite partielle $\{k_j\}$ telle que la limite $b_r = \lim_{j\to\infty} b_r^{(k_j)}$ existe pour tout $r = 1, 2, \ldots$

On a donc en vertu de (10)

$$\sum_{r=1}^{\infty} r|b_r| \leqslant M. \tag{11}$$

Pour tout m naturel on a en conséquence $\sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant$ $\leqslant \sum_{r=1}^{m-1} |b_r^{(k_j)} - b_r| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r^{(k_j)}| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r|$, ce qui donne selon (11) et par définition de b_r l'inégalité $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant 2\frac{M}{m}$, d'où, m étant arbitraire, $\lim_{j\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| = 0$.

Remarquons que la série $\sum_{r=1}^{\infty} b_r Y_r$ est d'après (3) et (11) convergente et l'égalité qui précède implique d'après (8) que X' en

est la somme. Comme $Y_r \subset H$ pour tout r naturel et H est un ensemble linéaire, on a donc $X' \subset H'$.

Il est ainsi démontré que pour $X = X' + X'' \subset \Gamma_{(1)}$, où $X' \subset \Delta_1$ et $X'' \subset \Delta_2$, on a $X' \subset H'$. La formule (9) se trouve donc établie.

D'autre part, on constate facilement que la suite $\{Z_{r,s}\}$ tend faiblement vers Θ avec $s \to \infty$; par conséquent en vertu de (4), la suite $\{X_{r,s}\}$ tend faiblement vers Y_r, lorsque $s \to \infty$. On a donc

$$(12) \qquad Y_r \subset \Gamma_{(1)} \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots$$

Soit maintenant $\{X_k\}$ où $X_k \subset \Gamma_{(1)}$ pour $k = 1, 2, \ldots$ une suite faiblement convergente vers $X \subset \Delta_1 \Gamma_{(2)}$[1]. On a évidemment $X_k = X_k' + X_k''$, où $X_k' \subset H'$ et $X_k'' \subset \Delta_2$. On aperçoit aisément que la suite $\{X_k'\}$ converge faiblement vers X, d'où $X \subset H_{(1)}$. Réciproquement, il existe pour tout $X \subset H_{(1)}$ une suite $\{X_k\}$ de fonctionnelles appartenant à H et faiblement convergente vers X. Nous pouvons admettre sans restreindre la généralité que $|X_k| \leqslant 1$ quel que soit $k = 1, 2, \ldots$ Par définition de la suite $\{Y_r\}$ il existe pour tout k un indice r_k tel que $|X_k - Y_{r_k}| \leqslant \frac{1}{k}$, de sorte que la suite $\{Y_{r_k}\}$ est aussi faiblement convergente vers X. Il en résulte selon (12) que $X \subset \Gamma_{(2)}$, d'où $X \subset \Delta_1 \Gamma_{(2)}$ (puisque $H_{(1)} \subset \Delta_1$ par définition de Δ_1). Donc

$$(13) \qquad \Delta_1 \Gamma_{(2)} = H_{(1)}.$$

En procédant ainsi de suite, on montrera par induction que l'on a d'une façon générale

$$(14) \qquad \Delta_1 \Gamma_{(n+1)} = H_{(n)} \quad pour\ tout \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ceci établi, revenons à l'ensemble donné G. Si l'on admet que le dérivé G' de G n'est pas faiblement fermé, il en sera évidemment de même du dérivé H' de H, et, en vertu de (9) et (13), il en sera encore de même du dérivé faible $\Gamma_{(1)}$ de Γ. D'une

[1]) Le symbole AB désigne d'une facon générale la partie commune des ensembles A et B.

façon analogue, en admettant que le dérivé faible $G_{(n-1)}$ d'ordre $n-1$ de G ne soit pas faiblement fermé, il en sera évidemment de même du dérivé faible $H_{(n)}$ d'ordre n de H, donc, en vertu de (14), aussi du dérivé faible $\Gamma_{(n+1)}$ d'ordre $n+1$ de Γ, c. q. f. d.

Remarque. On peut définir les *dérivés faibles* $\Gamma_{(\xi)}$ *d'ordre transfini* ξ *de* Γ pour les nombres transfinis ξ de deuxième classe, en posant $\Gamma_{(\xi)} = \sum_{\eta<\xi} \Gamma_{(\eta)}$ ou $\Gamma_{(\xi)} = (\Gamma_{(\xi-1)})_{(1)}$, suivant que ξ est un nombre-limite ou non.

On peut établir alors par induction le théorème suivant, analogue au th. 1:

Il existe pour tout nombre transfini ξ *de deuxième classe un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires définies dans l'espace* (c_0) *et dont le dérivé faible d'ordre* ξ *n'est pas faiblement fermé* [1].

On peut cependant montrer que, E étant un espace du type (B) séparable et Γ un ensemble arbitraire de fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe toujours un tel nombre ξ fini ou transfini de deuxième classe que l'ensemble $\Gamma_{(\xi)}$ est faiblement fermé. C'est une conséquence facile du th. 4 (Chap. VIII, § 5), p. 124.

Théorème 2. *Soient* E *un espace du type* (B) *séparable et* $\Gamma \subset \overline{E}$ [2] *un ensemble linéaire. Pour que* $\Gamma_{(1)} = \overline{E}$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $M > 0$ *tel que* Γ *contienne pour tout* $x \subset E$ *une fonctionnelle* X *satisfaisant aux conditions*

$$(15) \qquad \|X\| \leqslant M \quad \textit{et} \quad |X(x)| = \|x\|.$$

Démonstration. Nécessité. Soit pour tout n natutel Δ_n l'ensemble des fonctionnelles linéaires X définies dans E qui sont des limites faibles des suites $\{X_k\}$ de fonctionnelles appartenant

[1] Voir S. Banach, *Sur le dérivé faible des ensembles de fonctionnelles linéaires*, Studia Mathematica IV (à paraître).

[2] $\overline{E}$ désigne, comme auparavant, l'espace conjugué avec E, c. à d. l'espace des fonctionnelles linéaires définies dans E.

à Γ et vérifiant l'inégalité $|X_k| \leqslant n$ pour $k = 1, 2, \ldots$ On a donc en vertu du th. 2 (Chap. VIII, § 5), p 123, $\Gamma_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, d'où par l'hypothèse

$$\bar{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n . \tag{16}$$

Remarquons que tout Δ_n est un ensemble fermé. Soit, en effet, $\{X_j\}$ une suite de fonctionnelles appartenant à Δ_n où $\lim_{j\to\infty} |X_j - X| = 0$. Par définition de Δ_n il existe donc pour tout j une suite $\{X_k^j\}$ faiblement convergente vers X_j, où $X_k^j \subset \Gamma$ et $|X_k^j| \leqslant n$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Etant donnée une suite $\{x_r\}$, dense dans E, les égalités $\lim_{k\to\infty} X_k^j(x_r) = X_j(x_r)$ et $\lim_{j\to\infty} X_j(x_r) = X(x_r)$, qui se présentent quels que soient j et r, entraînent l'existence d'une suite $\{X_{k_j}^j\}$ telle que $\lim_{j\to\infty} X_{k_j}^j(x_r) = X(x_r)$ pour tout $r = 1, 2, \ldots$ Comme $|X_{k_j}^j| \leqslant n$, il en résulte en vertu du th. 2 (Chap. VIII, § 4), p. 123, que la suite $\{X_{k_j}^j\}$ converge faiblement vers X, d'où $X \subset \Delta_n$.

Ainsi, tout Δ_n étant fermé et l'espace $\bar{E}$ étant également du type (B), l'égalité (16) entraîne l'existence d'un indice n_0 tel que Δ_{n_0} contient une sphère $K \subset \bar{E}$. Désignons par X' le centre et par ρ le rayon de K.

Etant donné un élément $x \subset E$, il existe en vertu du th. 3 (Chap. IV, § 2), p. 55, une fonctionnelle $X_0 \subset \bar{E}$ telle que

$$X_0(x) = |x| \quad et \quad |X_0| = 1 . \tag{17}$$

Posons

$$\lambda = \frac{\quad}{1 + |X'} \qquad et \quad X'' = \lambda X_0 + (1 - \lambda) X'. \tag{18}$$

On en tire facilement $|X'' - X'| \leqslant \rho$, d'où $X'' \subset K \subset \Delta_{n_0}$. Il existe par conséquent deux suites $\{X_k'\}$ et $\{X_k''\}$ de fonctionnelles appartenant à Γ et faiblement convergentes vers X' et X'' respectivement; on a donc en même temps

$$|X_k'| \leqslant n_0 \quad et \quad |X_k''| \leqslant n_0 \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

La suite $\left\{\frac{1}{\lambda} X_k'' \cdot \frac{1-\lambda}{\quad} X_k'\right\}$ appartient à Γ et d'après (18)

tend faiblement vers X_0. D'après (17) il existe par conséquent un indice k_0 tel que

$$(20) \quad \frac{1}{\lambda} X''_{k_0}(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda} X'_{k_0}(x) = \alpha \cdot |x| \quad où \quad \frac{1}{2} < \alpha < 2.$$

En posant donc $X = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda} X''_{k_0} - \frac{1-\lambda}{\lambda} X'_{k_0}\right)$, on obtient $X \subset \Gamma$, $X(x) = |x|$, et, en vertu de (18)—(20), $|X| \leqslant M = \frac{2n_0}{\rho}(2+2|X'|+\rho)$, de sorte que M est indépendant de x. Ainsi la condition (15) se trouve en effet réalisée.

S u f f i s a n c e. Δ désignant l'ensemble des fonctionnelles linéaires X appartenant à Γ et telles que $|X| \leqslant 1$, il existe dans Δ suivant le th. 4 (Chap. VIII, § 5), p. 124 [1]), une suite de fonctionnelles linéaires $\{X_r\}$ faiblement dense dans Δ.

Posons pour tout $x \subset E$

$$(21) \qquad y = \{\eta_r\} \quad où \quad \eta_r = X_r(x) \quad pour \quad r = 1, 2, \ldots$$

On a donc

$$(22) \qquad |\eta_r| \leqslant |X_r| \cdot |x| \leqslant |x|,$$

d'où $y \subset (m)$. En admettant pour y la norme adoptée dans (m), on obtient de (21) et (22)

$$(23) \qquad |y| \leqslant |x|.$$

D'autre part, $X \subset \Gamma$ désignant une fonctionnelle qui remplit par l'hypothèse la condition (15), posons $X' = \frac{1}{M} X$. Par conséquent $|X'| \leqslant 1$, d'où $X' \subset \Delta$. Il existe donc une suite partielle $\{X_{r_j}\}$ faiblement convergente vers X', d'où $\lim_{j\to\infty} |X_{r_j}(x)| = |X'(x)|$, ce qui donne en vertu de (15) et (21), $\overline{\lim_{r\to\infty}} |\eta_r| \geqslant |X'(x)| \geqslant \frac{1}{M}|x|$ et par conséquent

$$(24) \qquad |y| \geqslant \frac{1}{M}$$

[1]) en y remplaçant Γ par Δ et Δ par $\{X_r\}$.

En posant donc $y = U(x)$, on voit facilement de (21) et (22) que l'opération $U(x)$ est linéaire; en vertu de (24) il en est de même de l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$. L'espace E étant par hypothèse séparable, le contredomaine E_1 de $U(x)$ l'est également par suite de la continuité de cette opération.

Ceci dit, soient X une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E et

$$Y(y) = X[U^{-1}(y)], \tag{25}$$

de sorte que (l'opération $U^{-1}(y)$ étant linéaire) Y est une fonctionnelle linéaire définie dans E_1. En vertu du théorème de M. S. Mazur (Chap. IV, § 4), p. 72 [1]), il existe donc une suite double de nombres $\{\alpha_{nr}\}$ telle que

$$Y(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1} \alpha_{nr}\,\eta_r \quad pour \quad y \subset E_1 \tag{26}$$

et $\alpha_{nr} = 0$ pour $r > k_n$ où $\{k_n\}$ est une suite de nombres naturels. On en déduit suivant (21):

$$\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{nr}\,\eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{nr}\,\eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{nr}\,X_r(x) = \bar{X}_n(x), \tag{27}$$

de sorte que $\bar{X}_n \subset \Gamma$ pour $n = 1, 2, \dots$, puisque Γ est un ensemble linéaire et $X_r \subset \Delta \subset \Gamma$.

Or, on a selon (26) et (27) $Y[U(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{X}_n(x)$, d'où selon (25) $X(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{X}_n(x)$ pour tout $x \subset E$; la suite $\{\bar{X}_n\}$ converge donc faiblement vers X. Par conséquent $X \subset \Gamma_{(1)}$, ce qui prouve que la condition est en effet suffisante, c. q. f. d.

Il est facile de voir que *l'ensemble E de toutes les fonctions réelles bornées et continues $x(q)$, définies dans n'importe quel ensemble métrique Q, constitue un espace du type (B),* lorsqu'on y définit l'addition et la multiplication par nombres de la façon habituelle et prend comme norme

[1]) en y remplaçant ξ_j par η_r.

$$\|x\| = \text{borne} \sup_{q \subset Q} |x(q)| . \tag{28}$$

Si, en outre, l'ensemble Q est *compact*, l'espace E en question est *séparable*.

On a dans ces hypothèses le

Théorème 3. *$\{q_r\}$ désignant une suite de points dense dans Q, il existe pour toute fonctionnelle linéaire X définie dans E un tableau de nombres réels $\{\alpha_{ir}\}$ et une suite de nombres naturels $\{k_n\}$ telles que*

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{ir}\, x(q_r) = X(x) \quad \textit{pour} \quad x \subset E.$$

La démonstration résulte du th. 2 qui précède, étant donné que dans ces conditions l'ensemble Γ des fonctionnelles linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{m} a_i\, x(q_i)$, où a_i sont des nombres réels et m est un nombre naturel quelconques, satisfait à l'hypothèse du th. 2.

En effet, il existe pour tout $x \subset E$ un $q_0 \subset Q$ tel que $x(q_i) \geqslant \frac{1}{2} \max_{q \subset Q} |x(q)| = \frac{1}{2} \|x\|$ et comme $X_0(x) = x(q_0)$ est une fonctionnelle linéaire à la norme 1 on n'a qu'à mettre $M = 2$.

Le th. 3 peut être aussi déduit facilement par l'application directe du th. de M. S. Mazur, p. 72.

§ 2. *Convergence faible des éléments.*

Soit à présent Q un ensemble abstrait quelconque, pas nécessairement métrique, et E l'espace du type (B) de toutes les fonctions réelles *bornées* $x(q)$ définies dans Q, avec la norme (28).

Une fonctionnelle X définie dans E s'appellera *non négative*, lorsque, quelle que soit la fonction $x \subset E$, la condition $x(q) \geqslant 0$ pour tout $q \subset Q$ entraîne $X(x) \geqslant 0$.

Théorème 4. *Toute fonctionnelle linéaire X définie dans E est une différence de deux fonctionnelles linéaires non négatives définies dans E.*

Démonstration. Posons pour tout sous-ensemble S de Q

$$\mu(S) = \underset{T \subset S}{\text{borne sup}}\, X(\varphi_T) \tag{29}$$

où φ_T désigne d'une façon générale la fonction caractéristique de l'ensemble T. On a donc

$$0 \leqslant \mu(S) \leqslant \|X\| \tag{30}$$

et $\mu(S_1 + S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$ pour S_1 et S_2 disjoints. En raison de (29) on a de plus

$$X(\varphi_S) \leqslant \mu(S). \tag{31}$$

Pour toute fonction $x \subset E$ telle que $\|x\| = 1$ soit

$$x_n(q) = \frac{i}{n} \quad \textit{pour} \quad \frac{i}{n} \leqslant x(q) < \frac{i+1}{n} \quad \textit{où} \quad -n \leqslant i \leqslant n. \tag{32}$$

On a évidemment $|x_n(q) - x(q)| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $q \subset Q$, d'où $\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{n}$ et par conséquent

$$x = \lim x_n. \tag{33}$$

$S_{i,n}$ désignant l'ensemble de tous les éléments de Q qui satisfont à l'équation $x_n(q) = \frac{i}{n}$ où $-n \leqslant i \leqslant n$, posons

$$X'(x) = \lim_{n \to \infty} \sum^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n}). \tag{34}$$

On montre facilement que, en vertu de (33), la limite (34) existe et qu'on a selon (30) $|X'(x)| \leqslant \|X\|$.

Or, la fonctionnelle $X'(x)$ est non négative, car, en admettant que

$$x(q) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad q \subset Q, \tag{35}$$

on obtient de (30) et (34) l'inégalité

$$X'(x) \geqslant 0. \tag{36}$$

Remarquons d'autre part que (32) donne $x_n(q) = \sum_{i=-n}^{n} \frac{i}{n} \varphi_{S_{i,n}}(q)$,

d'où selon (31) $X(x_n) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n})$ et par conséquent d'après (33) et (34)

$$(37) \qquad X(x) \leqslant X'(x),$$

de sorte que la fonctionnelle

$$(38) \qquad X''(x) = X'(x) - X(x)$$

est également non négative, car on a en vertu de (37) l'inégalité $X''(x) \geqslant 0$ toutes les fois que la condition (35) se présente. Enfin, $X(x) = X'(x) - X''(x)$ par suite de (38).

Théorème 5. *Pour qu'une suite de fonctions $\{x_n\}$ à normes bornées dans leur ensemble et appartenant à E converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(39) \qquad \lim\ \underline{\lim}\ |x_n(q_i)| = 0$$

pour toute suite de points $\{q_i\}$ appartenant à Q.

Démonstration. Nécessité. Supposons, par contre, que pour une suite $\{q_i\}$ de points de Q on ait $\overline{\lim}_{n\to\infty}\ \underline{\lim}_{i\to\infty} |x_n(q_i)| > \alpha > 0$. Il existe donc une suite croissante $\{n_k\}$ de nombres naturels telle que $\underline{\lim}_{i\to\infty} |x_{n_k}(q_i)| > \alpha > 0$ pour tout k et on peut en conséquence extraire de $\{q_i\}$ par la méthode de la diagonale une suite partielle $\{q_{i_j}\}$ telle que

$$(40) \qquad |\lim_{j\to\infty} x_{n_k}(q_{i_j})| > \alpha > 0 \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots$$

Considérons la fonctionnelle linéaire X définie par la formule

$$X(x) = \operatorname{Lim}_{j\to\infty} x(q_{i_j}) \quad pour\ tout \quad x \subset E,$$

le signe Lim ayant ici le sens défini au Chap. II, § 3, 4, p. 34. On a alors selon (40) $|X(x_{n_k})| > \alpha$ pour $k = 1, 2, \ldots$, d'où

$$(41) \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} |X(x_n)| > \alpha > 0,$$

de sorte que la suite $\{x_n\}$ ne tendrait pas faiblement vers Θ.

Suffisance. Afin de prouver qu'une suite de fonctions $\{x_n\}$ où $\|x_n\| < M$ pour $n = 1, 2, \ldots$ converge faiblement vers Θ, il suffit donc, inversement, de montrer qu'il n'existe aucune fonctionnelle linéaire et non négative X qui remplisse l'inégalité (41).

Or, supposons par contre, qu'une telle fonctionnelle X existe; nous pouvons évidemment admettre que

$$\|X\| = 1 \quad et \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, X(x_n) > \alpha > 0. \tag{42}$$

Posons pour tout $q \subset Q$

$$s_n(q) = \begin{cases} x_n(q) & pour \quad x_n(q) \geqslant 0 \\ 0 & pour \quad x_n(q) < 0 \end{cases}$$

et

$$t_n(q) = x_n(q) - s_n(q).$$

Une des limites $\overline{\lim}\, X(s_n)$ et $\overline{\lim}\, X(t_n)$ dépasse évidemment $\frac{\alpha}{2}$. Soit donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X(s_n) > \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{43}$$

Posons ensuite pour tout $q \subset Q$

$$y_n(q) = \begin{matrix} s_n(q) & pour \quad s_n(q) \geqslant \frac{\alpha}{6} \\ 0 & pour \quad s_n(q) < \frac{\alpha}{6}. \end{matrix}$$

Alors $\|s_n - y_n\| \leqslant \frac{\alpha}{6}$, d'où selon (42) et (43)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, X(y_n) > \frac{\alpha}{3} > 0. \tag{44}$$

Désignons par S_n le sous-ensemble de Q formé de tous les $q \subset Q$ tels que $|x_n(q)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ et soit $\varphi_n(q)$ la fonction caractéristique de l'ensemble S_n. Comme $\|y_n\| \leqslant \|s_n\| \leqslant \|x_n\| < M$, on a $\varphi_n(q) \geqslant \frac{1}{M} y_n(q)$ pour tout $q \subset Q$ et $n = 1, 2, \ldots$, donc, la fonctionnelle X étant non

négative, $X(M\cdot\varphi_n) \geqslant X(y_n)$, d'où selon (44), en posant $\beta = \frac{\alpha}{3M}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X(\varphi_n) > \beta > 0. \tag{45}$$

Considérons la fonction d'ensemble F définie pour les sous-ensembles S de Q par l'égalité

$$F(S) = X(\varphi_S) \tag{46}$$

où φ_S est la fonction caractéristique de S. L'inégalité (45) peut donc être écrite dans la forme $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} F(S_n) > \beta > 0$. Soit n_1 le plus petit nombre naturel tel que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F(S_{n_1} S_n) > 0 \text{ [1]}. \tag{47}$$

Un tel n_1 existe.

En effet, supposons par contre que $\lim\limits_{n\to\infty} F(S_k S_n) = 0$ et par conséquent que $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(\sum\limits_{i=1}^{k} S_i S_n\right) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Il existerait donc deux suites croissantes $\{k_j\}$ et $\{n_j\}$ telles que pour $j = 1, 2, \ldots$

$$k_j < n_j < k_{j+1}, \quad F(S_{n_j}) > \beta \quad et \quad F\left(\sum_{i=1}^{k_j} S_i S_{n_j}\right) < \frac{\beta}{2}.$$

En posant $T_j = S_{n_j} - \sum\limits_{i=1}^{k_j} S_i S_{n_j}$, on aurait en conséquence

$$T_{j_1} \quad et \quad T_{j_2} \quad disjoints\ pour\ tout \quad j_1 \neq j_2 \tag{48}$$

et

$$F(T_j) > \frac{\beta}{2} \quad pour \quad j = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Par suite, γ_j désignant la fonction caractéristique de l'ensemble T_j, les formules (46) et (49) donneraient

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right) > n\frac{\beta}{2} \quad pour \quad n = 1, 2, . \tag{50}$$

On a cependant d'après (48) $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j\right| \leqslant 1$, d'où $X\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j\right) \leqslant 1$ pour $n = 1, 2, .$ contrairement à (50).

[1]) cf. la note [1]), p. 212.

En procédant comme pour (47), on aboutit par induction à l'existence d'une suite croissante $\{n_j\}$ satisfaisant aux inégalités $\lim_{n\to\infty} F(S_{n_1} S_{n_2} \dots S_{n_j} S_n) > 0$, de sorte qu'aucun des ensembles $\{S_{n_j}\}$ n'est vide.

Soit à présent q_i pour $i = 1, 2, \dots$ un point arbitraire de l'ensemble $S_{n_1} S_{n_2} \dots S_{n_i}$. Evidemment, pour tout $i \geqslant j$ on a donc $q_i \subset S_{n_j}$, d'où, par définition de S_n, l'inégalité $|x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ pour tout $j = 1, 2, \dots$ Il en résulte que $\lim_{i\to\infty} |x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$ et par conséquent que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \lim_{i\to\infty} |x_n(q_i)| \geqslant \frac{\alpha}{6}$, contrairement à l'hypothèse (39).

Théorème 6. *Etant donné un espace E du type (B), pour qu'une suite $\{x_n\}$ où $x_n \subset E$ pour $n = 1, 2, \dots$ à normes bornées dans leur ensemble converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(51) \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} |X_i(x_n)| = 0$$

pour chaque suite de fonctionnelles $\{X_i\}$ appartenant à un ensemble Γ de fonctionnelles linéaires définies dans E qui jouisse des propriétés suivantes:

1° *l'ensemble des normes des fonctionnelles $X \subset \Gamma$ est borné,*

2° *il existe un nombre $N > 0$ tel que pour tout élément $x \subset E$ l'ensemble Γ contient une fonctionnelle X remplissant l'inégalité*

$$(52) \qquad X(x) \geqslant N \cdot |x|.$$

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, considérons l'espace E_1 de toutes les fonctions réelles bornées, définies dans Γ. Faisons correspondre à tout élément $x \subset E$ la fonction $f \subset E_1$ donnée par la relation

$$(53) \qquad f(X) = X(x) \quad pour \quad X \subset \Gamma.$$

M désignant la borne supérieure des normes des fonction-

nelles $X \subset \Gamma$, posons $f = U(x)$. On a d'après (53) et (52) $N \cdot |x| \leqslant \|f\| \leqslant M \cdot |x|$; par conséquent, l'opération U étant additive, elle est linéaire, de même que son opération inverse.

Ceci établi, si la suite $\{x_n\}$ satisfait à la condition (51), on en conclut d'après (53), en posant $f_n(X) = X(x_n)$, que $\lim_{n\to\infty} \underline{\lim}_{i\to\infty} |f_n(X_i)| = 0$. Il en résulte en vertu du th. 5, p. 219, que la suite $\{f_n\}$ tend faiblement vers Θ. Comme l'opération $x = U^{-1}(f)$ est linéaire et $x_n = U^{-1}(f_n)$, il s'en suit en vertu du th. 3, (Chap. IX, § 5), p. 143, que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers Θ.

On montre par un raisonnement semblable que la condition est nécessaire.

Théorème 7. *Etant donné un espace E du type (B), pour qu'une suite $\{x_n\}$ de ses éléments à normes bornées dans leur ensemble converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(54) \qquad \lim_{n\to\infty} X(x_n) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad X \subset \Gamma,$$

où Γ est un ensemble de fonctionnelles jouissant des propriétés 1° et 2° et en outre faiblement compact.

Démonstration. La condition est nécessaire par définition de la convergence faible des éléments. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit (en raison du th. 6) de montrer que (54) entraîne (51).

Supposons par contre qu'il existe une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ et une suite $\{X_i\}$ de fonctionnelles de Γ telles que

$$(55) \qquad \underline{\lim} |X_i(x_{n_k})| > \alpha > 0 \quad \textit{pour} \quad k = 1, 2,$$

Or, l'ensemble Γ étant par hypothèse faiblement compact, il existerait une suite partielle $\{X_{i_j}\}$ faiblement convergente vers une fonctionnelle $X_0 \subset \Gamma$, d'où selon (55) $|X_0(x_{n_k})| \geqslant \alpha > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, contrairement à (54).

On déduit facilement des théorèmes qui viennent d'être établis les théorèmes suivants.

Théorème 8. *Etant donnée une suite $\{x_n\}$ de fonctions réelles continues, définies dans un ensemble Q métrique compact et bornées dans leur ensemble, la condition nécessaire et suffisante pour la faible convergence de $\{x_n\}$ vers Θ est qu'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(q) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad q \subset Q.$$

La démonstration s'obtient du th. 7, en désignant par E l'espace des fonctions réelles continues définies dans Q et par Γ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires X définies dans E de la forme $X(x) = x(q)$ où $x \subset E$ et $q \subset Q$. On a alors évidemment $|X| = 1$ pour tout $X \subset \Gamma$ et il est aisé de voir que Γ remplit aussi les autres hypothèses du th. 7.

Remarque. En particulier, on obtient aussitôt du th. 8 les conditions pour la convergence faible des suites de fonctions continues définies dans l'intervalle rectiligne, resp. dans le carré.

Théorème 9. *Pour qu'une suite de fonctions $\{x_n\}$ appartenant à l'espace (M) converge faiblement vers Θ, il faut et il suffit que pour toute suite de fonctions $\{\alpha_i(t)\}$ telles que*

$$\int^1 |\alpha_i(t)|\, dt = 1 \quad \textit{où} \quad i = 1, 2, \ldots$$

on ait

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} \left| \int^1 \alpha_i(t)\, x_n(t)\, dt \right| = 0 .$$

La démonstration résulte du th. 6, p. 222, en désignant par Γ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires X définies dans (M) de la forme

$$X(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt \quad \textit{où} \quad \int_0^1 |\alpha(t)|\, dt = 1 .$$

On a alors $|X| = 1$ pour tout $X \subset \Gamma$ et, pour tout $x \subset (M)$, il existe une fonction $\alpha(t)$ vérifiant les conditions

$$\int^{1} |\alpha(t)|\, dt = 1 \quad et \quad \int^{1} \alpha(t)\, x(t)\, dt \geqslant \frac{1}{2} \|x\|.$$

Il suffit donc de poser dans le th. précité $N = \frac{1}{2}$.

Théorème 10. *Pour qu'une suite $\{x_n\}$, où $x_n = \{\xi_k^n\}$, d'éléments de l'espace (m) converge faiblement vers 0, il faut et il suffit d'avoir pour toute suite d'indices $\{k_i\}$*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{i\to\infty}} |\xi_{k_i}^n| = 0.$$

La démonstration résulte du th. 6, p. 222, en désignant par Γ la suite $\{X_j\}$ des fonctionnelles de la forme

$$X_j(x) = \xi_j \quad où \quad x = \{\xi_j\} \subset (m) \quad et \quad j = 1, 2, \ldots$$

On a alors $|X_j| = 1$ pour $j = 1, 2, \ldots$ et il existe en outre pour tout $x \subset (m)$ un j tel que $|X_j(x)| \geqslant \frac{1}{2} \|x\|$. On posera donc $N = \frac{1}{2}$.

REMARQUES.

INTRODUCTION.

§ 3. Nous écrivons $\lim_{n\to\infty}$ as $x_n(t) = x(t)$, lorsque la suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ converge asymptotiquement vers la fonction $x(t)$.

§ 5. Le dernier th. implique que si les fonctions continues $x_n(t)$ sont bornées dans leur ensemble et la suite $\{x_n(t)\}$ est convergente partout, $\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,d\alpha(t)$ existe pour toute fonction $\alpha(t)$ à variation bornée (cf. F. Riesz, *Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires,* Acta Szeged 1 (1922), p. 18—26).

§ 6. La démonstration du th. de M. Lebesgue se trouve aussi dans l'ouvrage de M. H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen,* Monatshefte f. Math. u. Phys. 32 (1922), p. 1—88.

§ 7. La distance des éléments x et y dans (S) peut être définie également par la formule $(x, y) = \underset{0\leqslant\omega<\infty}{\text{borne inf}}\,[\omega + m \underset{t}{E}(|x(t) - y(t)| > \omega)]$ [1]. La métrique ainsi obtenue est équivalente à celle du texte (voir 1, p. 9).

Pareillement, dans (s) la métrique $(x, y) = \underset{1\leqslant n<\infty}{\text{borne inf}}\left[\frac{1}{n} + \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k - \eta_k|\right]$ équivaut à celle donnée dans 2., p. 10 (cf. M. Fréchet, *Les espaces abstraits,* Paris 1928, p. 82 et 92).

Dans les exemples 1, 3, 5, 7, 8 et 10 on pourrait d'ailleurs admettre que les fonctions en question sont définies dans un ensemble d'une nature plus générale. Ainsi p. ex. dans 5, p. 11, les fonctions peuvent être supposées définies dans un espace (D) compact arbitraire, ou même seulement complet, en se bornant dans ce dernier cas aux fonctions bornées continues, resp. uniformément continues.

[1]) Pour la signification des symboles v. p. 3, renvoi [2]).

Beaucoup d'exemples des espaces (D), intéressants au point de vue de la théorie des opérations, se trouvent dans les ouvrages précités de M. H. Hahn et de M. M. Fréchet; à l'égard des applications une attention spéciale méritent les espaces considérés dans les travaux de M. J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen* et *Bemerkungen zu meiner Arbeit..*, Math. Zeitschr. 26 (1927), p, 47—65 et 417—431.

Parmi les autres exemples sont à noter les suivants.

11. *L'espace (Q) de toutes les fonctions quasi-périodiques* avec la métrique $(x,y)=\max\limits_{-\infty<t<+\infty}|x(t)-y(t)|$.

12. *L'espace* $(H^{(p)})$ *où* $p\geqslant 1$, *formé de toutes les fonctions définies dans le cercle* $s^2+t^2\leqslant 1$ *et respectivement équivalentes* (c. à d. égales presque partout) *à des fonctions harmoniques.* La métrique qui y est entendue est donnée par la formule $(x,y)=\left(\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant 1}|x(s,t)-y(s,t)|^p\,dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$.

13. *L'espace (R) des fonctions définies dans* $[0,1]$ *et équivalentes respectivement à des fonctions intégrables au sens de Riemann* avec la métrique $(x,y)=$ $=\text{vrai}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$. Pour une fonction $z(t)$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, mesurable et supérieurement bornée presque partout, $\text{vrai}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} z(t)$ désigne la borne inférieure des nombres ω tels que $z(t)\leqslant\omega$ presque partout.

Les exemples 11 et 12 se trouvent dans l'ouvrage de G. Ascoli, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*, Annali di Matematica X (1932), p. 33 — 81, et l'exemple 13 dans celui de M. W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Mathematica I (1929), p. 1 — 39 et 241 — 255.

M. Orlicz a de plus attiré l'attention sur une classe d'espaces qui contient les espaces $(L^{(p)})$ où $p>1$ et dont les autres ont avec eux beaucoup de propriétés communes.

Soit notamment $M(u)$ une fonction convexe définie pour toutes les valeurs réelles de u et telle que 1° $M(-u)=M(u)$, 2° $\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}M(u)=0$, 3° $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}M(u)=+\infty$ et 4° $\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}}\frac{1}{M(u)}M(2u)<+\infty$.

Soit $N(u)$ la fonction définie pour toutes les valeurs réelles de v par les relations: $N(v)=\max\limits_{0<u<\infty}[uv-M(u)]$, lorsque $v\geqslant 0$ et $N(v)=N(-v)$ pour $v<0$.

Ceci posé, *l'ensemble (O) de toutes les fonctions* $x(t)$ *définies dans* $[0,1]$ *pour lesquelles il existe l'intégrale* $\int\limits^1 M[x(t)]\,dt$, *métrisé par la formule*

$$(x, y) = \text{borne sup} \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, \omega(t)\, dt \quad \textit{où} \quad \int_0^1 N[\omega(t)]\, dt \leqslant 1,$$

constitue un espace métrique complet.

En particulier, pour $M(u) = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \cdot |u|^p$ où $p > 1$, on a $N(v) = v^{\frac{p}{p-1}}$ et $(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, de sorte que l'espace (O) est dans ce cas identique à $(L^{(p)})$.

En remplaçant dans la définition de $M(u)$ la condition 4^0 par $\overline{\lim}_{u \to 0} \frac{1}{M(u)} M(2u) < +\infty$ sans y changer la définition de $N(v)$, *l'espace* (o) *des suites de nombres réels* $\{\xi_n\}$ *telles que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n)$ *est convergente, métrisé par la formule*

$$(x, y) = \text{borne sup} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \eta_n)\, \omega_n \quad \textit{où} \quad x = \{\xi_n\},\ y = \{\eta_n\} \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} N(\omega_n) \leqslant 1,$$

constitue aussi un espace métrique complet, dont les espaces $(l^{(p)})$ avec $p > 1$ sont des cas particuliers (cf. W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus (B)*, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc. et des Lettres, Février 1932).

Il est enfin à remarquer qu'aucun des espaces 1—13, (O) et (o) n'est compact; plus encore: dans chacun d'eux les ensembles compacts sont non denses.

§ 8. Les espaces 1, 2, 5—10 et 12, de même que les espaces (O) et (o) de M. W. Orlicz, sont séparables. Par contre les espaces 3, 4, 11 et 13 ne sont pas séparables, tout en étant, comme les précédents, de puissance du continue. Dans chacun de ces derniers espaces les ensembles de puissance inférieure à celle du continu sont non denses.

§ 9. Comme l'a remarqué M. K. Kuratowski, si une opération mesurable (B) transforme d'une façon biunivoque un espace métrique séparable E en espace métrique E_1, l'opération inverse remplit la condition de Baire. La démonstration s'appuie sur le th. 7, p. 17, et sur le théorème suivant: pour qu'une opération $U(x)$ définie dans un espace métrique E et dont le contre-domaine est situé dans un espace métrique E_1 remplisse la condition de Baire, il faut et il suffit que pour tout ensemble fermé $G_1 \subset E_1$ l'ensemble G d'éléments $x \subset E$ tels que $U(x) \subset G_1$ remplisse la condition de Baire (v. C. Kuratowski, *La propriété de Baire dans les espaces métriques*, Fundamenta Mathematicae XVI (1930), p. 390—394).

CHAPITRE I.

§ 1. Etant donné que les espaces du type (F), étudiés dans les chapitres suivants, constituent des cas particuliers des espaces du type (G), notamment lorsqu'on les considère comme des groupes par rapport à l'*addition* qu'on y définit, il a été préférable de fixer d'emblée le nom d'addition à l'opération fondamentale du groupe et d'y conformer les énoncés et la notation.

Tous les espaces métriques 1—13, (O) et (o) constituent, comme on voit aussitôt, autant d'espaces du type (G); comme opération fondamentale du groupe on y admettra l'addition ordinaire des fonctions, resp. des suites. Tous ces espaces sont abeliens, c. à d. que l'addition définie dans eux est commutative (en formule: $x+y=y+x$).

Parmi d'autres exemples des espaces du type (G) on peut citer les suivants:

14. L'espace des transmormations homéomorphes d'un espace métrique compact Q en lui-même, lorsqu'on définit la distance de deux homéomorphies x et y par la formule $(x,y) = \text{borne sup}_{q \subset Q} (x(q), y(q)) + \text{borne sup}_{q \subset Q} (x^{-1}(q), y^{-1}(q))$ et entend par l'addition la composition ordinaire des transformations.

15. L'espace des transformations isométriques d'une sphère (située dans un espace métrique) en elle-même, lorsqu on y définit la métrique et l'addition comme dans l'exemple précédent.

16. L'espace de toutes les fonctions définies dans un espace métrique Q et admettant comme valeurs les nombres complexes à module 1 (on peut les supposer en outre continues ou uniformément continues), lorsqu'on définit la distance de deux fonctions x et y par la formule $(x,y) = \text{borne sup}_{q \subset Q} |x(q) - y(q)|$ et entend par l'addition la multiplication ordinaire des fonctions.

17. L'espace des transformations biunivoques de l'ensemble des nombres naturels en lui-même avec la métrique

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x(n)-y(n)| + |x^{-1}(n)-y^{-1}(n)|}{1+|x(n)-y(n)| + |x^{-1}(n)-y^{-1}(n)|}$$

(où $x(n)$, etc. désigne l'image de n obtenue par la transformation x, etc.) et avec l'addition entendue comme composition des transformations.

Etant donné un espace arbitraire E du type (G), si une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E est convergente, on a évidemment

$$\text{(I)} \qquad \lim_{p\to\infty,\, q\to\infty} (x_p - x_q, \Theta) = 0,$$

mais on ne sait pas si, réciproquement, la condition (I) entraîne toujours la convergence de cette suite.

Si dans un espace métrique E l'addition des éléments est définie de manière que E constitue par rapport à elle un groupe, et même les axiomes II_1 et II_2 étant remplis, il ne suffit pas que la condition (I) entraîne toujours la convergence de la suite $\{x_n\}$ vers un élément de E, pour que l'espace E soit complet. On ignore toutefois s'il n'existe alors dans E une autre métrique, équivalente à la métrique donnée, et qui en formerait un espace du type (G). M. D. van Dantzig a montré qu'il en est ainsi dans l'hypothèse supplémentaire que E est un espace abelien; dans ce cas on peut trouver même une métrique équivalente „glissante", c. à d. telle qu'on ait $(x, y) = (x+z, y+z)$ pour tout $z \subset E$ (cf. D. van Dantzig, *Einige Sätze über topologische Gruppen* Jahresber. d. Deutsch Math. Ver. 41, 1932).

La définition des espaces du type (G), de même que tous les théorèmes du texte se trouvent dans la note: S. Banach, *Über metrische Gruppen,* Studia Mathematica III (1931), p. 101—113; cf. aussi F. Leja, *Sur la notion de groupe abstrait topologique,* Fundamenta Mathematicae IX (1927), p. 37—44.

§ 2. Les espaces 1—10 (Introduction, § 7, p. 9—12), de même que les espaces 11—13, (O) et (o) définis ici (v. p. 227—228), sont connexes.

§ 3. Outre le th. 5, p. 24, on a le théorème: *l'espace E étant connexe, si $\{U_n(x)\}$ est une suite de fonctionnelles linéaires, l'ensemble des points où cette suite est bornée est soit de I-e catégorie, soit identique à E.*

§ 4. Il résulte de la remarque précédente que, *l'espace E étant connexe, si $\{U_{p,q}(x)\}$ est une suite double de fonctionnelles linéaires telles qu'on a pour une suite $\{x_p\}$ d'éléments de E la formule $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}} |U_{p,q}(x_p)| = +\infty$ quel que soit p, l'ensemble de tous les $x \subset E$ tels que $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}} |U_{p,q}(x)| = +\infty$ pour $p = 1, 2, \ldots$ est de II-e catégorie et son complément est de I-e catégorie.*

On peut montrer que les th. 3—7 du Chapitre III (p. 38—42) subsistent déjà pour les espaces E et E_1 du type (G), *lorsque l'espace E est supposé séparable* (cf. S. Banach. l. c., Stud. Math. III, p. 101—113). Le th. 5, p. 41, est aussi une conséquence immédiate du th. 4, p. 23, et de la remarque, p. 228. L'hypothèse que E soit séparable est essentielle; il serait intéressant de savoir si les th. 3—7 en question subsistent aussi pour des espaces du type (G) non séparables, mais connexes.

Il est à remarquer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour chaque espace E du type (G):

(α) étant donnée une opération linéaire $y = U(x)$ qui transforme E d'une façon biunivoque en un espace E_1 du type (G), l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est linéaire

(β) étant donnée dans E une autre métrique $(x, y)^*$ par rapport à la quelle E est également un espace du type (G), si $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ implique toujours $\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0)^* = 0$, alors on a aussi l'implication inverse.

Or, on ignore si ces propriétés se présentent p. ex. pour l'espace fonctionnel E coïncidant avec celui de l'exemple 16, p. 229, lorsqu'on y désigne par Q l'ensemble des nombres complexes à module 1.

CHAPITRE II.

§ 1. On peut également traiter les espaces vectoriels avec une multiplication des éléments non seulement par les nombres réels, mais aussi par les nombres complexes et sans que les axiomes 1)—7) soient modifiés. Ces espaces constituent le point de départ de la théorie des opérations linéaires complexes et d'une classe, encore plus vaste, des opérations analytiques, qui présentent une généralisation des fonctions analytiques ordinaires (cf. p. ex. L. Fantappiè, *I funzionali analitici*, Città di Castello 1930). Nous nous proposons d'en exposer la théorie dans un autre volume.

Un ensemble H situé dans un espace vectoriel E s'appelle *base de Hamel dans E*, lorsque tout élément $x \subset E$ est une combinaison linéaire des éléments de H sans qu'aucun $x \subset H$ soit une combinaison linéaire des autres éléments de H. Tout espace vectoriel admet des bases de Hamel et elles sont deux à deux toujours de puissance égale.

§ 2. La remarque précédente implique pour tout espace vectoriel E l'existence des fonctionnelles additives, homogènes et non identiquement nulles, définies dans E.

§ 3. Le dernier théorème (v. p. 34, 4.) implique aussitôt qu'à tout sous-ensemble S de l'ensemble des nombres naturels N on peut assigner une me) sure mS de façon que 1) $mS \geqslant 0$, 2) $m(S_1 + S_2) = mS_1 + mS_2$ *pour* S_1 *et* S_2 *disjoints*, 3) $mS_1 = mS_2$, *lorsque* $S_1 \cong S_2$ et 4) $mN = 1$.

Quelle que soit la mesure assujettie aux conditions 1) — 4), l'ensemble de tous les nombres de la forme $an + b$ pour $n = 1, 2, \ldots$, avec a et b fixes, est de mesure $\frac{1}{a}$; l'ensemble de tous les nombres premiers est de mesure 0. Une mesure satisfaisant aux conditions 1) — 4) ne coïncide pas toujours avec la densité (lorsque celle-ci est définie), mais on peut toujours s'arranger de façon que cette condition supplémentaire soit également satisfaite.

CHAPITRE III.

§ 1. Au sujet de la définition des espaces du type (F) voir M. Fréchet, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, Acta Math. 47 (1926), p. 25 — 52.

Evidemment, les espaces 11 — 13, (O) et (o), définis p. 227 — 228, sont aussi du type (F).

M. S. Mazur a remarqué que tout espace du type (F) remplit la condition

(1) *si* $\lim_{p\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ *et* $\lim_{n\to\infty} k_n = k$, *alors* $\lim (h_n x_n + k_n y_n) = hx + ky$.

On ne sait pas si dans tout espace vectoriel, complet et satisfaisant à la condition (1) la métrique peut être remplacée par une métrique équivalente de manière à en obtenir un espace du type (F).

§ 3. Les th. 3—9, p. 38—43, restent valables pour tout espace métrique vectoriel E satisfaisant à la condition (1) et à la condition suivante:

(2) *si* $\lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} (x_p - x_q) = 0$, *il existe un élément* $x \subset E$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

M. Mazur suppose de pouvoir remplacer cette dernière condition par l'hypothèse que l'espace E est complet. Une démonstration simple des th. 3 — 5 pour le cas des espaces du type (B) se trouve dans la note de M. J. Schauder, *Über die Umkehrung linearer stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. II (1930), p. 1—6.

Considérons à présent, dans un espace E du type (F), un ensemble quelconque $G \subset E$, linéaire et fermé. Il est évident qu'on obtiendra une décomposition de E en parties disjointes, si on convient de ranger deux éléments x et y de E dans une même partie, lorsqu'on a $x - y \subset G$, et seulement alors. On a le théorème suivant: l'ensemble E^* des parties de E ainsi obtenues constitue un espace du type (F), lorsqu'on y définit la distance et les opérations fondamentales par les conditions (où X, Y et Z désignent des éléments de E^*):

1^0 $(X, Y) =$ borne inf (x, y) où $x \subset X$ et $y \subset Y$,

2^0 $X + Y$ est celui des $Z \subset E^*$ qui contient les éléments de la forme $x + y$ où $x \subset X$ et $y \subset Y$,

3^0 tX est celui des $Y \subset E^*$ qui contient les éléments de la forme tx où $x \subset X$.

La démonstration de ce th. se trouve dans mon livre *Teorja operacyj*, Tom I, Warszawa 1931, p. 47—49 (en polonais); cf. aussi F. Hausdorff, *Zur Theorie der linearen metrischen Räume*, Journ. f. reine u. angew. Math. 167 (1932), p. 294—311.

En s'appuyant sur ce th., on peut montrer que, étant donnée une opération linéaire U définie dans un espace E du type (F) et dont le contredomaine est situé dans un espace E_1, également du type (F), *si E est séparable, le contredomaine de U est mesurable* (B). Cependant, on ne sait pas si l'hypothèse que E soit séparable est essentielle.

§ 4. Les travaux suivants contiennent des applications d'une autre méthode de la théorie des opérations à ce problème et aux problèmes voisins:

S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. III (1931), p. 92—94,

S. Mazurkiewicz, *Sur l'intégrale* $\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\,dt}{t}$, ibid., p. 114—118,

S. Banach, *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, ibid., p. 173—179,

H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, ibid., p. 180—184,

S. Kaczmarz, *Integrale vom Dinischen Typus*, ibid., p. 189—199.

§ 5. Les autres applications de la théorie des opérations aux problèmes concernant les équations différentielles sont données dans les notes suivantes:

S. Banach, *Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre*, Math. Zeitschr. 27 (1927), p. 68—75,

W. Orlicz, *Zur Theorie der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lett., Février 1932.

§ 7. Etant donné un ensemble linéaire fermé $G \subset (s)$, il existe pour tout élément $x_0 \subset (s) - G$ une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans (s) et telle qu'on a $f(x) = 0$ pour tout $x \subset G$ et $f(x_0) = 1$.

Le th. 12, p. 51, implique que si le contredomaine d'une opération linéaire définie dans (s) est situé dans (s), il est un ensemble fermé.

CHAPITRE IV.

§ 1. Les espaces vectoriels normés ont été traité indépendamment de moi et presqu'à la même époque par M. N. Wiener, dans son ouvrage *Limit in terms of continuous transformations*, Bull. de la Soc. math. de France 150 (1922), p. 124—134.

Les espaces 11—13, (O) et (o), définis p. 227—228, sont du type (B). Par contre, l'espace (s) de l'exemple 2, p. 10 (v. aussi p. 50 — 52) n'est pas du type (B) et même, comme l'a démontré M. S. Mazur, il n'est homéomorphe à aucun espace du type (B).

§ 2 et 3. On peut établir pour les espaces E du type (F) l'équivalence des deux propriétés suivantes:

(α) Etant donnée une fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans un ensemble linéaire $G \subset E$, il existe une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \subset G$.

(β) Dans les mêmes conditions, si G est en outre fermé, il existe pour tout $x_0 \subset E - G$ une fonctionnelle linéaire $F(x)$ définie dans E et telle que $F(x_0) \neq 0$, mais $F(x) = 0$ quel que soit $x \subset G$.

Or, ces propriétés ne se présentent pas nécessairement dans tous les espaces du type (F). Ainsi p. ex. toutes les fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (S) s'annulent identiquement.

Etant donnés deux espaces E et E_1 du type (B) et une opération linéaire $U(x)$, définie dans l'ensemble linéaire $G \subset E$, dont le contredomaine est situé dans E_1, on ne sait pas si elle se laisse *étendre* (prolonger) de G sur E tout entier, c. à d. s'il existe une opération linéaire $V(x)$ définie dans E, ayant son contredomaine dans E_1 et telle que $V(x) = U(x)$ pour tout $x \subset G$.

Cette extension de $U(x)$ est toujours possible, lorsque E_1 est à un nombre fini de dimensions, mais même alors la condition $|V|_E = |U|_G$ peut rester irréalisable.

§ 4. Les conditions 1°—3°, p. 72, peuvent être remplacées par les deux suivantes:

1) $\alpha_{nj} = 0$ pour tout $j > n$ où $n = 1, 2, \ldots$

2) $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{nj}| = |f|$ pour $n = 1, 2, \ldots$

La forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces (O) et (o) de M. Orlicz (cf. p. 227—228) est établie dans son ouvrage cité. Ainsi p. ex. toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans l'espace (O) est de la forme $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ où $\alpha(t)$ est une fonction telle que $\int_0^1 N(k\alpha(t))\,dt$ existe pour un k compris entre 0 et 1.

Selon M. F. Riesz la norme de la fonctionnelle linéaire $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t)$ définie dans (C), où $g(t)$ est une fonction à variation bornée, est égale à la variation de la fonction $\bar{g}(t)$ définie comme suit: $\bar{g}(0) = g(0)$, $\bar{g}(1) = g(1)$ et $\bar{g}(t) = \lim_{h \to +0} g(t+h)$ pour $0 < t < 1$.

6. Voir F. Riesz, *Sur l'approximation des fonctions continues et des sommables*, Bull. of the Calcutta Math. Soc. XX (1928/29), p. 55—58.

§ 8. Voir le livre de F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues,* Paris 1913.

CHAPITRE V.

§ 1. Le th. 3, p. 79, implique que l'ensemble Q des points de convergence d'une suite d'opérations linéaires $\{U_n(x)\}$ à normes bornées dans leur ensemble est toujours fermé. Dans le cas général Q est un $F_{\sigma\delta}$.

Il est à noter à ce propos que, comme l'ont montré MM. S. Mazur et L. Sternbach, si $\{U_n(x)\}$ est une suite de *fonctionnelles* linéaires et l'ensemble Q de ses points de convergence n'est pas fermé, il existe dans Q une suite de points $\{x_i\}$ et un point $x_0 \subset E - Q$ tels que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$ et que la suite double $\{U_n(x_i)\}$ est bornée. On en déduit comme corollaire que dans ces conditions Q n'est pas un F_σ. Or, ces énoncés se laissent étendre au cas où $\{U_n(x)\}$ est, plus généralement, une suite *d'opérations* linéaires, pourvu que leurs contredomaines soient situés dans un espace E_1, aussi du type (B) et jouissant de la propriété:

(γ) pour toute suite $\{y_n\}$, où $y_n \subset E_1$ et $\|y_n\| = 1$ pour $n = 1, 2, \dots$, il existe une suite de nombres $\{t_n\}$ telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ soit divergente et que la suite des normes de ses sommes partielles soit bornée.

De la propriété (γ) jouissent p. ex. l'espace (c) et tous les espaces du type (B) à un nombre fini de dimensions.

Le corollaire qui vient d'être mentionné se laisse, selon une remarque commune de M. S. Mazur et moi, préciser davantage en ce sens que dans les conditions considérées l'ensemble Q n'est pas un $G_{\delta\sigma}$. Comme application, on en tire le th. que tout espace E du type (B) à une infinité de dimensions contient un ensemble linéaire qui est un $F_{\sigma\delta}$ sans être un $G_{\delta\sigma}$. MM. S. Mazur et L. Sternbach ont montré en outre que tout espace de ce genre contient un ensemble linéaire qui, sans être un F_σ, est une partie commune d'un F_δ et d'un G_δ; cependant tout ensemble linéaire G_δ y est fermé.

Dans certains espaces du type (B) on peut établir l'existence des ensembles linéaires qui sont des $F_{\sigma\delta\sigma}$ sans être des $F_{\sigma\delta}$. Reste ouvert le problème s'il en existe toujours dans des espaces du type (B) à une infinité de dimensions. On ignore aussi s'il existe des espaces du type (F) contenant des ensembles linéaires des classes de Borel plus élevées ou des ensembles linéaires (A) non mesurables (B) ou encore des ensembles linéaires remplissant la condition de Baire, mais n'étant pas (A). Tout espace du type (F) à une infinité de dimensions contient des ensembles linéaires ne remplissant pas la condition de Baire.

Ces problèmes se rattachent à certaines questions concernant les opérations additives. E et E_1 étant du type (F), toute opération $U(x)$ additive et mesurable (B) définie dans un ensemble linéaire fermé $G \subset E$ et dont le contredomaine se trouve dans E_1 est en vertu du th. 4, p. 23, continue. Or, si l'ensemble G n'est pas fermé, l'opération $U(x)$ peut ne pas être continue: nous connaissons des exemples où, G étant mesurable (B), l'opération $U(x)$ est discontinue de 1-e classe de Baire; mais nous ne connaissons aucun exemple où elle soit d'une classe de Baire plus élevée. De même, on ignore si l'opération $U(x)$ peut remplir la condition de Baire sans être en même temps mesurable (B).

On est amené aux opérations additives discontinues par l'inversion des opérations linéaires. E et E_1 étant du type (F), si l'opération linéaire $y = U(x)$ transforme d'une façon biunivoque E en un ensemble fermé $G_1 \subset E_1$, l'opération inverse $x = U^{-1}(y)$ est en vertu du th. 5, p. 41, continue. Or, si G_1 n'est pas fermé, l'opération U^{-1} peut ne pas être continue, mais si l'espace E est séparable, elle est toujours mesurable (B). Ainsi, p. ex., dans le cas où $E = E_1 = (L^2)$, cette opération est de 1-e classe de Baire.

§ 3. Le lemme et le th. 8 se trouvent dans la Note de M. F. Riesz, l. c., p. 151. On aperçoit aisément que le th. réciproque du th. 8 est aussi vrai. En outre, le th. 8 se laisse généraliser comme suit: *tout espace du type (F) contenant une sphère qui y est compacte n'a qu'un nombre fini de dimensions;* il est facile de voir que la réciproque est encore vraie.

§ 4. Le th. sur $(L^{(r)})$ établi p. 85, provient pour le cas $r = 1$ de M. H. Lebesgue (v. Annales de Toulouse, 1909).

§ 6. Tous ces exemples sont bien connus.

§ 7. La méthode A, qui correspond au tableau (A), s'appelle *normale*, lorsque $a_{ik} = 0$ pour $i < k$ et $a_{ik} \neq 0$ pour $i = k$. Telles sont pour $k > 0$ les méthodes C_k de Cesàro, de même que les méthodes E_k de Euler. Ces dernières sont d'après M. S. Mazur (l. c., Stud. Math. II, p. 40—50) des méthodes parfaites.

On ne sait pas si le th. 11, p. 95, subsiste, lorsque la méthode A n'est pas reversible.

Le th. 12, p. 95, peut être complété comme suit: si la méthode A est permanente, reversible et telle que chaque suite sommable par A vers un nombre l'est vers le même nombre par toute méthode permanente pas plus faible de A, alors A est une méthode parfaite.

Le th. sur la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans un espace vectoriel séparable $E \subset (m)$ (voir p. 72) montre que toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ y coïncide avec une *limite généralisée* obtenue par certaine

méthode A, c. à. d. qu'il existe un tableau (A) tel que toute suite $x \subset E$ est sommable vers $f(x)$ par la méthode correspondante à ce tableau. Or, si E n'est pas séparable, ce th. peut être en défaut; plus encore, il peut exister alors, comme l'a observé M. S. Mazur, une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctionnelles linéaires définies dans E, faiblement convergente vers une fonctionnelle linéaire $f(x)$ et telle que $f_n(x)$ coïncide pour tout $n = 1, 2, \ldots$ avec une limite généralisée obtenue par une méthode convenable, tandis que $f(x)$ soit dépourvue de cette propriété.

CHAPITRE VI.

§ 1. La notion d'opération totalement continue est due à M. D. Hilbert et à M. F. Riesz, qui ont été aussi les premiers à en mettre en évidence l'utilité.

Selon une remarque de M. S. Mazur, on a le th. suivant: $\{U_n(x)\}$ étant une suite d'opérations linéaires et totalement continues, définies dans un espace E du type (B) et telles que $\lim_{n\to\infty} U_n(x) = x$ pour tout $x \subset E$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $G \subset E$ soit compact, est que la convergence de $\{U_n(x)\}$ sur G soit uniforme. Un espace E qui admet une telle suite d'opérations est en vertu du th. 1, p. 96, séparable. La question si, réciproquement, tout espace E du type (B) séparable admet une pareille suite d'opérations, reste ouverte.

Au sujet du critère de la compacticité pour $G \subset E$ cf. aussi A. Kolmogoroff, *Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel*, Göttinger Nachrichten 1931, p. 60—63.

§ 2. Tous ces exemples sont connus.

§ 3. La notion d'opération conjuguée a été introduite en toute généralité pour la première fois dans ma Note *Sur les fonctionnelles linéaires II*, Studia Mathematica I (1929), p. 223—239, qui contient aussi le th. 3, p. 100. La démonstration du th. 4, p. 100, se trouve également dans la Note de M. J. Schauder, *Über lineare vollstetige Funktionaloperationen*, Studia Mathematica II (1930), p. 183—196.

CHAPITRE VII.

§ 1. M. W. Orlicz a observé que pour les espaces E faiblement complets le th. 2, p. 107, peut être précisé davantage, à savoir que la série (2) est alors convergente pour tout $x \subset E$.

Un système biorthogonal $\{x_i\}$, $\{f_i\}$ s'appelle *complet* si les suites $\{x_i\}$ et $\{f_i\}$ sont des suites totales (voir les définitions p. 42 et 58). On peut montrer

qu'il existe des systèmes biorthogonaux complets dans tout espace du type (B) séparable.

Un système biorthogonal $\{x_i\}$, $\{f_i\}$ est dit *normé*, lorsqu'on a $|x_i| = |f_i| = 1$ pour $i = 1, 2, \dots$ Selon une remarque de M. H. Auerbach, il existe des systèmes biorthogonaux normés et complets dans tout espace du type (B) à un nombre fini de dimensions. Cependant on ne sait pas s'il en est ainsi dans tout espace du type (B) séparable et même s'il y existe toujours un système biorthogonal complet tel que $|x_i| = 1$ pour $i = 1, 2, \dots$ et $\overline{\lim\limits_{i \to \infty}} |f_i| < \infty$.

§ 2. En vertu de la remarque précédente on peut supprimer dans le th. 5, p. 108, l'hypothèse que les suites $\{x_i(t)\}$ et $\{y_i(t)\}$ soient complètes.

§ 3. Le th., suivant lequel le système de Haar constitue une base dans $(L^{(p)})$ où $p \geqslant 1$, se trouve dans la Note de M. J. Schauder, *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 317—320.

On peut montrer que, étant donnée dans un espace E du type (B) une suite d'éléments $\{x_n\}$ telle qu'il existe pour tout $x \subset E$ exactement une suite de nombres $\{t_n\}$ donnant lieu à la faible convergence de la suite $\left\{\sum\limits_{n=1}^{k} t_n x_n\right\}$ vers x, la suite $\{x_n\}$ constitue dans E une base.

L'espace $(C^{(p)})$ (v. exemple 7, p. 11) admet une base pour $p = 1, 2, \dots$; on ignore cependant s'il en existe une dans l'exemple 10, p. 12. On ne sait non plus s'il y a une base p. ex. dans l'espace de toutes les fonctions réelles $x(s, t)$ définies dans le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et admettant les dérivées partielles d'ordre 1 continues, les opérations élémentaires dans cet espace étant définies comme d'ordinaire et la norme étant donnée par la formule

$$\|x\| = \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} |x(s, t)| + \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} |x'_s(s, t)| + \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} |x'_t(s, t)|.$$

L'existence d'une base dans tout espace E du type (B) séparable équivaut en vertu du th. 9, établi au Chap. XI, § 8, p. 185, à l'existence d'une base dans tout ensemble linéaire fermé $E_1 \subset (C)$. Or, on ne connaît aucun exemple d'espace du type (B) séparable, ayant une infinité de dimensions, non isomorphe avec (L^2) et tel que chacun de ses sous-ensembles linéaires fermé contienne une base. Remarquons toutefois que tout espace du type (B) à une infinité de dimensions renferme un ensemble linéaire fermé à une infinité de dimensions qui admet une base.

La notion de base peut être évidemment introduite d'une façon plus générale déjà pour les espaces du type (F). Dans l'espace (s) la base est donnée p. ex. par la suite d'éléments $\{x_i\}$ où $x_i = \{\xi_n^i\}$ et $\xi_n^i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = n \\ 0 & \text{pour } i \neq n. \end{cases}$

L'espace (S) ne contient aucune base; c'est une conséquence du fait qu'il n'y existe aucune fonctionnelle linéaire ne s'annulant pas identiquement.

CHAPITRE VIII.

§ 4 et 5. Suivant une remarque de M. S. Mazur, les th. 2—4, p. 123—124, subsistent aussi dans les espaces E du type (F), en remplaçant la condition (20) dans les th. 2 et 3 par la condition que la suite des fonctionnelles $\{f_n(x)\}$ soit bornée dans une sphère.

§ 6. Les conditions pour la convergence faible des fonctionnelles ont été données pour les espaces (c) par M. H. Hahn et pour les espaces $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ par M. F. Riesz.

Les conditions (45) et (46), données pour la faible convergence des fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (c) voir p. 130 et corriger selon p. VIII) prennent pour le cas de l'espace (c_0) la forme: 1⁰ *la suite* $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|\right\}$ *bornée* et 2⁰ $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$ *pour* $i = 1, 2, \ldots$

CHAPITRE IX.

§ 1. La notion de convergence faible des éléments a été étudié pour la première fois dans l'espace (L^2) par M. D. Hilbert et dans les espaces $(L^{(p)})$ où $p > 1$ par M. F. Riesz.

Un ensemble G situé dans un espace E du type (B) est dit *faiblement compact*, lorsque toute suite d'éléments de G contient une suite faiblement convergente. Dans les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$ tout ensemble borné est faiblement compact (cf. p. 130—131). Il en est de même dans (c) et (c_0), tandis que les espaces (C), (L), (l) et (m) sont dépourvus de cette propriété.

§ 2. Les conditions pour la convergence faible des éléments ont été données pour l'espace (c) par M. H. Hahn et pour les espaces (C) et $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ par M. F. Riesz. Le th., p. 137, sur l'équivalence dans (l) de la convergence faible avec la convergence suivant la norme se trouve dans la Note de M. J. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, Journ. f. reine u. angew. Math. 151 (1921), p. 79—111.

Il est à remarquer que la convergence faible d'une suite des *fonctionnelles* linéaires définies dans un espace E du type (B) n'est pas une condition suffisante pour la convergence faible de la même suite, lorsqu'on regarde cette dernière comme une suite *d'éléments* dans l'espace $\overline{E}$, c. à d. dans l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E (et qui est égale-

ment du type (B)). Ainsi p. ex. dans (l) la notion de la convergence faible varie suivant qu'on en considère les éléments comme des représentants des fonctionnelles linéaires ou non.

§ 4. Un espace E du type (B) s'appelle *faiblement complet*, lorsque toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de E, faiblement convergente (c. à d. telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E), est faiblement convergente *vers un élément* de E. L'espace (c_0), donc aussi les espaces (c) et (m), ne sont pas faiblement complets. La propriété d'être faiblement complet a été établie pour l'espace (L) par M. H. Steinhaus (v. *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeitschr. 5 (1918), p. 186—221) et pour les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où $p > 1$ par M. F. Riesz (v. *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497). Suivant une remarque de M. W. Orlicz (l. c. Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. et des Let., Fevrier 1932), l'espace (O) est faiblement complet, si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N(u)} \cdot N(2u) < +\infty$; il en est de même pour l'espace (o).

Une série d'éléments d'un espace du type (B) s'appelle *commutativement convergente* („unbedingt konvergent"), lorsqu'elle reste convergente indépendamment de l'ordre de succession de ses termes. La propriété 7^0 (Chap. III, § 3), p. 37, établie pour les espaces du type (F) implique aussitôt que la convergence absolue d'une série en entraîne toujours la convergence commutative, mais on ne sait pas si la réciproque est vraie en dehors des espaces à un nombre fini de dimensions. M. W. Orlicz a démontré les théorèmes suivants.

(1) *La somme d'une série commutativement convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes,*

(2) *Afin qu'une série soit commutativement convergente, il faut et il suffit que toute série partielle soit convergente,*

(3) *A la même fin, il faut et il suffit que toute suite partielle soit faiblement convergente vers un élément.*

Il en résulte dans l'hypothèse que l'espace E est faiblement complet que, pour la convergence commutative d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ d'éléments de E, il faut et il suffit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ soit convergente pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E. Ce dernier résultat permet d'établir pour les espaces faiblement complets plusieurs propriétés importantes des séries commutativement convergentes d'éléments, tout à fait analogues à celles des séries commutativement convergentes de nombres. Ainsi p. ex. une série

$\sum_{n=1} x_n$ est commutativement convergente, lorsqu'il existe un nombre $M > 0$ tel que l'ont ait $|x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k}| < M$, quel que soit le système d'indices différents $n_1, n_2, ..., n_k$, ou encore, lorsque la série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ est convergente, quelle que soit la suite de nombres $\{t_n\}$ tendant vers 0. Ces théorèmes jouent un rôle dans la théorie des séries orthogonales (cf. M. W. Orlicz, l. c., Stud. Math. I (1929), p. 241—255).

CHAPITRE X.

§ 1. Au sujet de la théorie des équations linéaires, développée dans ce chapitre, voir F. Hausdorff, *Zur Theorie der linearen Räume*, Journ. f. reine u. angew. Math. 167 (1932), p. 294—311.

Les théorèmes de ce § ont été démontrés dans le cas où $E = E' = (L^2)$ par MM. E. Hellinger et O. Toeplitz (v. *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Encyklopedie der Math. Wiss., Leipzig 1923—1927). Dans les cas plus général où $E = E' = (L^{(p)})$ avec $p > 1$ les th. 1 et 3 ont été établis par M. F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 449—497 et pour $E = E' = (l^{(p)})$ où $p > 1$ par le même auteur dans son livre *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris 1913. Les th. 2 et 4 pour $E = E' = (L^{(p)})$ resp. $(l^{(p)})$ où $p \geqslant 1$ ont été démontrés par M. S. Saks, *Remarques sur les fonctionnelles linéaires dans les champs L^p*, Studia Mathematica I (1929), p. 217—222.

§ 2. Si on fait tomber dans le th. 15, p. 154, l'hypothèse que l'opération $U(x)$ est totalement continue, les équations en question peuvent ne pas avoir le nombre égal de solutions linéairement indépendantes. On peut cependant montrer que pour $U = 1$ on a l'inégalité $n \leqslant \nu$ et qu'elle redevient égalité, lorsque, en outre, l'espace E est faiblement complet et tel que tous les ensembles bornés y sont faiblement compacts (v. S. Mazur, *Über die Nullstellen linearer Operationen*, Stud. Math. II (1930), p. 11—20).

CHAPITRE XI.

§ 2. Le plus ancien exemple connu d'une transformation isométrique des espaces du type (B) l'un dans l'autre est celui de la transformation isométrique de (L^2) en (l^2) qui s'obtient des th. de Riesz-Fischer et Parseval-Fatou.

§ 3. On ignore si le th. 2, p. 166, subsiste pour les espaces du type (F); suivant une remarque de MM. S. Mazur et S. Ulam, il devient toutefois faux

pour les espaces du type (G). Les mêmes auteurs m'ont de plus signalé le corollaire suivant du th. 2 en question: il n'est pas possible de définir dans un espace métrique E les opérations (d'addition des éléments et de multiplication par nombres) de deux manières différentes, de façon que dans les deux cas E devienne un espace vectoriel normé et que l'élément Θ de E reste le même.

§ 4. On ne connaît aucun exemple de deux espaces du type (B) séparables, à une infinité de dimensions et qui ne soient homéomorphes; d'autre part, on ne sait pas démontrer que p. ex. (C) est homéomorphe à (c). Pareillement, on ne réussit pas d'établir l'homéomorphie entre (C) et (l). Or, les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(q)})$ sont homéomorphes pour $p \geqslant 1 \leqslant q$ arbitraires (v. S. Mazur, *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels*, Stud. Math. I (1929), p. 83—85).

D'un intérêt particulier semble être la question si (C) est homéomorphe avec l'espace des fonctions continues définies dans le carré. On ne connait aucun exemple de deux espaces métriques compacts à un nombre fini, mais inégal, de dimensions (au sens de Menger-Urysohn) et tels que les espaces des fonctions continues définies dans eux soient homéomorphes.

§ 5. La notion de rotation est applicable d'une façon générale aux espaces du type (G). Il peut arriver que la seule rotation possible autour de Θ y soit donnée par la transformation $U(x) = x$; dans les espaces du type (F) la transformation $V(x) = -x$ est aussi une rotation autour de Θ. Il existe des espaces du type (B) à une infinité de dimensions où il n'y a que ces deux rotations autour de Θ. La forme générale (15) des rotations dans (L^2), établie p. 174, (d'ailleurs connue dépuis longtemps), montre que pour tout couple d'éléments x et y à la norme 1 il y existe une rotation autour de Θ qui transforme x en y. M. S. Mazur a posé la question si tout espace du type (B) séparable, ayant une infinité de dimensions et jouissant de cette propriété est isométrique avec (L^2).

§ 6. La notion d'isomorphie s'applique aussi aux espaces du type (G). Deux espaces du type (G) sont équivalents, lorsqu'il existe une transformation isométrique et *additive* de l'un en l'autre.

Soit pour deux espaces isomorphes E et E_1 du type (B)

$$(E, E_1) = \text{borne inf } [\log (|U| \cdot |U^{-1}|)]$$

où U parcourt toutes les transformations biunivoques linéaires de E en E_1. Si $(E, E_1) = 0$, les espaces E et E_1 seront dits *presque isométriques.* Les espaces isométriques sont en même temps presque isométriques. La réciproque est vraie en tout cas pour les espaces à un nombre fini de dimensions, mais on ne

sait pas réfuter l'hypothèse que p. ex. les espaces (c) et (c_0), qui ne sont pas isométriques, soient presque isométriques.

Considérons l'ensemble J_E de tous les espaces qui s'obtiennent d'un espace donné E du type (B), lorsqu'on en remplace la norme par une norme équivalente quelconque. Il est évident que tout espace qui appartient à J_E est isomorphe avec E et que tout espace isomorphe avec E est *isométrique* avec un espace de l'ensemble J_E. Divisons J_E en sous-ensembles, en rangeant deux espaces dans le même sous-ensemble ι, lorsqu'ils sont presque isométriques. Pour deux sous-ensembles ι_1 et ι_2 de J_E posons $(\iota_1, \iota_2) = (E_1, E_2)$ où E_1 et E_2 sont des espaces arbitraires appartenant respectivement à ι_1 et ι_2. On peut montrer que cette définition est univoque et que l'ensemble I_E de tous les ι, ainsi métrisé, constitue un espace métrique complet. J'ai introduit ces notions en collaboration avec M. S. Mazur.

§ 7. On peut étudier aussi des produits infinis. Désignons par $(E_1 \times E_2 \times \ldots)_{c_0}$ où $E_1, E_2, \ldots$ sont des espaces du type (B) l'espace E du type (B) défini comme suit: les éléments de E sont toutes les suites $\{x_n\}$ où $x_n \in E_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$; l'addition et la multiplication par nombres terme à terme; la norme $\| \{x_n\} \| = \max\limits_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n$ On définit d'une façon analogue p. ex. les espaces $(E_1 \times E_3 \times \ldots)_c$, $(E_1 \times E_2 \times \ldots)_m$ et $(E_1 \times E_2 \times \ldots)_{l^p}$ où p 1.

§ 8. P. Urysohn a été premier à démontrer l'existence d'un espace métrique séparable contenant des sous-espaces isométriques à tout espace métrique séparable donné d'avance (v. P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. 151 (1927), p. 1—38).

§ 9. On ne sait pas si l'équivalence des espaces $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ entraîne toujours l'isomorphie des espaces E_1 et E_2 (cf. th. 11, p. 188). La réciproque du th. 12, p. 189, est évidemment fausse, mais on ignore s'il en est de même de la réciproque du th. 13, p. 189, à savoir, si l'équivalence entre l'espace E du type (B) séparable et l'espace $\overline{\overline{E}}$ entraîne, oui ou non, l'existence dans toute suite bornée d'éléments de E d'une suite partielle faiblement convergente vers un élément de E. La question suivante reste aussi ouverte: étant donné un espace E du type (B) tel que l'espace conjugué $\overline{E}$ n'est pas séparable, existe-t-il dans E une suite bornée d'éléments ne contenant aucune suite partielle faiblement convergente?

CHAPITRE XII.

Nous allons énumérer ici une série de *propriétes isométriques*. resp. *isomorphes*, resp. *dimensionnelles*, c. à d. qui se reproduisent, lorsqu'on passe d'un

espace du type (B) qui en jouit à un espace quelconque isométrique, resp. isomorphe, resp. de dimension linéaire égale.

Propriétés isométriques:

(1) La convergence faible d'une suite d'éléments $\{x_n\}$ vers l'élément x_0, jointe à l'égalité $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x_0|$, entraîne $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$.

(2) $|x_0| = 1$ entraîne l'existence d'une et d'une seule fonctionnelle linéaire $f(x)$ telle que $f(x_0) = 1$ et $|f| = 1$.

(3) Isométrie de l'espace avec l'espace conjugué.

(4) Isométrie de l'espace avec chaque sous-ensemble linéaire et fermé à une infinité de dimensions.

(5) Isométrie entre tout couple de sous-ensembles linéaires à un nombre fini donné $n \geqslant 2$ de dimensions.

Proprietés isomorphes:

(6) Existence d'une base.

(7) Existence pour tout sous-ensemble linéaire fermè S d'un sous-ensemble linéaire fermé T tel que tout élément x se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $x = s + t$ où $s \subset S$ et $t \subset T$.

(8) Existence pour tout sous-ensemble linéaire fermé S d'une transformation linéaire de l'espace entier en S entier.

(9) Existence pour tout espace séparable E d'une transformation linéaire de l'espace donné en E tout entier.

(10) Isomorphie de l'espace avec l'espace conjugué.

(11) Isomorphie de l'espace avec son carré.

Propriétes dimensionnelles:

(12) La propriété d'être faiblement complet.

(13) Compacticité faible des sous-ensembles bornés.

(14) Existence de la base dans tout sous-ensemble linéaire fermé.

(15) Isomorphie de tous les sous-ensembles linéaires fermés à une infinité de dimensions.

(16) Egalité de la dimension linéaire de tous les sous-ensembles linéaires fermés à une infinité de dimensions.

(17) Equivalence entre la convergence faible des éléments et leur convergence suivant la norme.

(18) Egalité entre la dimension linéaire de l'espace et celle de son carré.

Sur le tableau qui suit la présence et l'absence connues de ces propriété dans divers espaces est désignée respectivement par $+$ et $-$; les mailles libres correspondent aux problèmes ouverts, d'ailleurs pas faciles.

Propriétés		Espace	(M)	(m)	(C)	$(C^{(p)})_{p\geqslant 1}$	(c)	(c_0)	(L)	(L^2)	$(L^{(p)})_{1<p\neq 2}$	(l)	$(l^{(p)})_{1<p\neq 2}$
	isométriques	(1)	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—
		(2)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		(3)	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—
		(4)	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—
		(5)	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—
	isomorphes	(6)	—	—	+	+	+	+	+	+	—	—	—
		(7)							—	+		—	
		(8)							+	+		+	
		(9)					—	—	+	—	—	—	—
		(10)	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—
		(11)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	dimensionnelles	(12)	—	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—
		(13)	—	—	—	—	+	+	—	+	+	—	+
		(14)	—	—						+			
		(15)	—	—	—	—			—	+	—		
		(16)	—	—	—	—	+	+	—	+	—	+	+
		(17)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	—
		(18)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Comme l'a remarqué M. S. Mazur, il existe des espaces séparables à une infinité de dimensions qui, sans être isomorphes avec (L^2), jouissent de la propriété (3), donc aussi de la propriété (10), tandis qu'il n'en existe aucun, du moins parmi les espaces connus, qui jouisse de la propriété (4), (5) ou (14). M. Mazur a démontré d'autre part, que tout espace séparable, à une infinité de dimensions et qui possède la propriété (5) pour $n = 2$ est, réciproquement, isométrique avec (L^2). La propriété (6) est en défaut dans tous les espaces non séparables, mais on ignore si tous les espaces séparables la possèdent. On ne sait non plus s'il existe un espace séparable à une infinité de dimensions qui, sans être isomorphe à (L^2), (L) ou (l), posède la propriété (8). Les propriétés (11) et (18) se présentent pour tous les espaces connus à une infinité de dimensions; on ignore cependant s'il en est ainsi en général pour tous les espaces pareils. On ne sait ni démontrer, ni réfuter que tout espace séparable jouit de la propriété (14). Enfin, on ne connait aucun exemple d'espace à une infinité de dimensions qui, sans être isomorphe avec (L^2), possède la propriété (15).

On remarquera qu'aucune des propriétés isométriques envisagées ici n'est une propriété isomorphe. Or, nous ne savons pas si toutes les propriétés isomorphes qui ont été énumérées ne sont en même temps des propriétés dimensionnelles. Parmi les autres problèmes restés ouverts signalons les suivants:

1° Soient $X_1(x)$ et $X_2(x)$ deux fonctionnelles linéaires quelconques définies dans un espace E du type (B) à une infinité de dimensions et ne s'annulant pas identiquement. G_1 et G_2 désignant respectivement les ensembles des éléments de E où ces fonctionnelles s'annulent, on peut montrer que $\dim_l(G_1) = \dim_l(G_2)$; or, est-il vrai que $\dim_l(G_1) = \dim_l(E)$?

2° Les dimensions linéaires de deux espaces du type (B) étant supposées incomparables, est-il vrai qu'il en est de-même de celles de leurs carrés?

Notons pour terminer quelques résultats de M. S. Mazur concernant la géométrie des espaces vectoriels normés.

E désignant un tel espace, appelons *translation* toute transformation isométrique de l'espace E en lui-même de la forme $U(x) = x + x_0$, où $x_0 \subset E$; les ensembles s'obtenant par translation des ensembles linéaires s'appelleront *variétés linéaires*. Une variété linéaire $H \neq E$ portera le nom d'*hyperplan*, lorsqu'il n'existe aucune variété linéaire fermée G telle que $H \subset G \subset E$ et $H \neq G \neq E$. Nous dirons qu'un ensemble A *est situé d'un coté* de l'hyperplan H, lorsque tout segment unissant deux point de $A - H$ est disjoint de H. Un ensemble C sera dit *corps convexe*, lorsqu'il est fermé, convexe et contient des points intérieurs. Un hyperplan H s'appellera *plan d'appui* („Stützebene") du corps convexe C, lorsque C est situé d'un coté et à la distance 0 de H; en particulier H peut donc passer par des points frontières de C.

Ceci posé, on a le théorème: par tout point frontière x_0 d'un corps convexe C passe un plan d'appui H de C (cf. G. Ascoli, *Sugli spazi lineari...*, Annali di Mathematica X (1932), p. 33—81). Il en résulte que tout ensemble convexe fermé est faiblement fermé. En d'autres termes: étant donnée une suite $\{x_n\}$ de points de E, faiblement convergente vers $x_0 \subset E$, il existe des nombres non-négatifs $c_i^{(n)}$ à indices naturels, tels que $c_i^{(n)} = 0$ pour tout n à partir d'un certain i et que la suite de points $\{y_n\}$, où $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(n)} x_i$ pour tout i à partir d'un certain n, converge vers le point x_0. Cette dernière convergence a été obtenue par M. S. Mazur et moi d'abord par une autre voie.

En particulier, pour l'espace (C) elle a été établie aussi par MM. D. C. Gillespie et W. A. Hurwitz (v. *On sequences of continuous functions having continuous limits*, Transact. Americ. Math. Soc. 32 (1930), p. 527—543) et, indépendamment, par M. Z. Zalcwasser (v. *Sur une propriété du champ des fonctions continues*, Studia Mathematica II (1930), p. 63—67).

On peut montrer de plus que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence faible d'une suite (bornée) de points $\{x_n\}$ vers un point x_0, est que tout corps convexe (borné) contenant une infinité de points x_n contienne le point x_0.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

[1]) Terme coïncidant avec le terme classique „prolongement" pour les fonctions.

[1]) Terme coïncidant pour les suites orthogonales de fonctions avec le terme „normale“.

AUTEURS CITÉS.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE VII. **Suites biorthogonales.**

CHAPITRE VIII. **Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type** *(B)*.

CHAPITRE IX. **Suites faiblement convergentes d'éléments.**

CHAPITRE X. **Equations fonctionnelles linéaires.**

CHAPITRE XI. **Isométrie, équivalence, isomorphie.**

CHAPITRE XII. **Dimension linéaire.**

ANNEXE. **Convergence faible dans les espaces du type** (B).